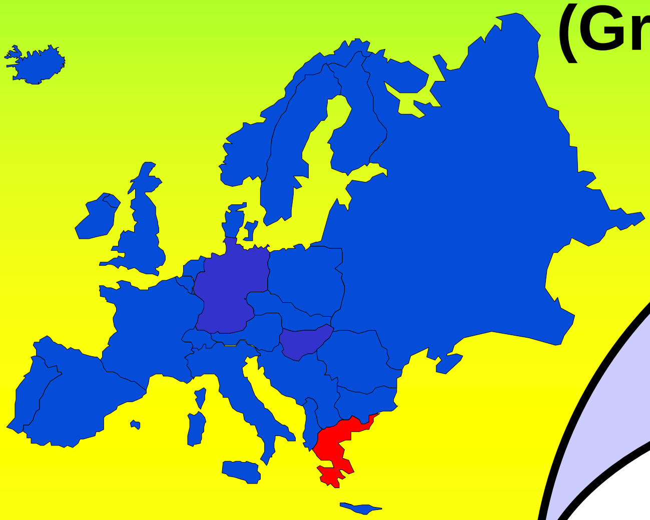
Movimento Elíptico

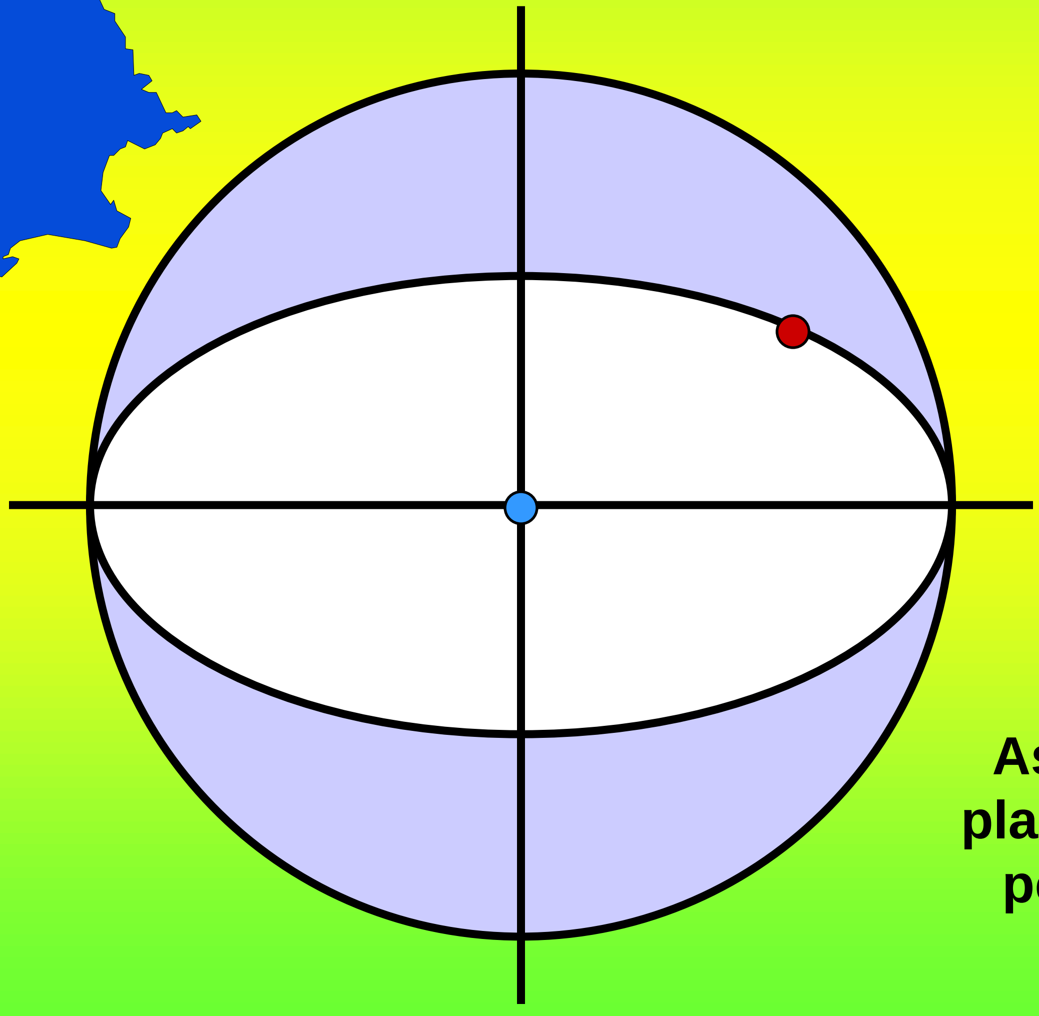
R. Boczko
IAG-USP

26
05
07

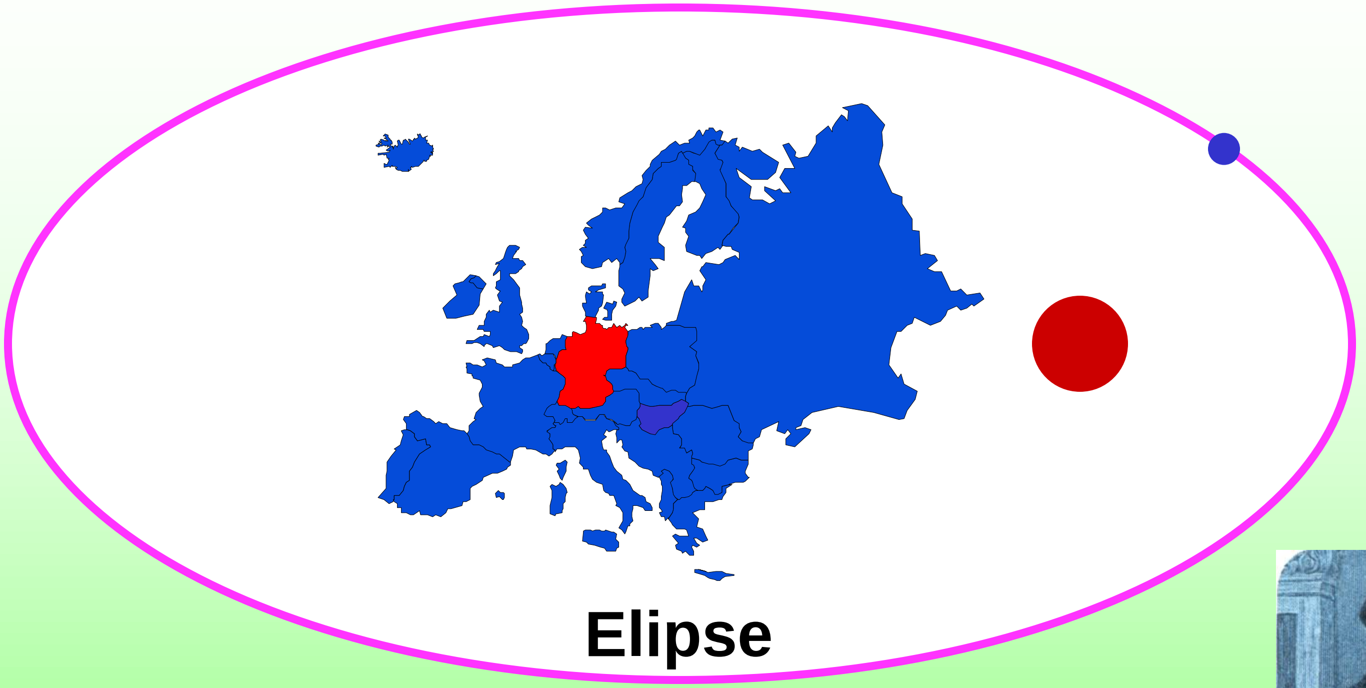
Órbitas não circulares



Eudoxo
(Grego, 408 a.C. – 355 a.C.)



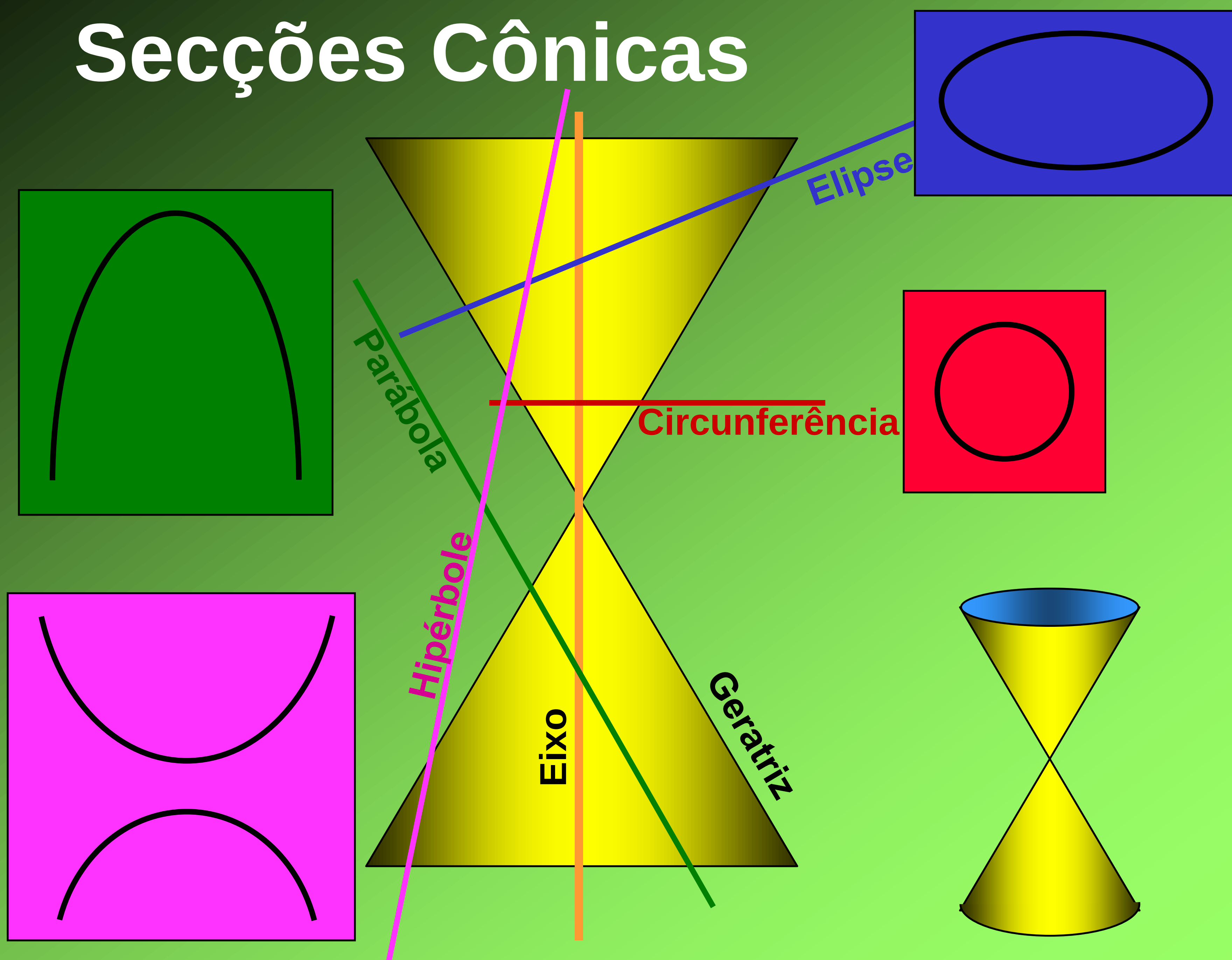
As órbitas dos planetas não são perfeitamente circulares



Movimento Kepleriano

Kepler
Alemão
1571 - 1630

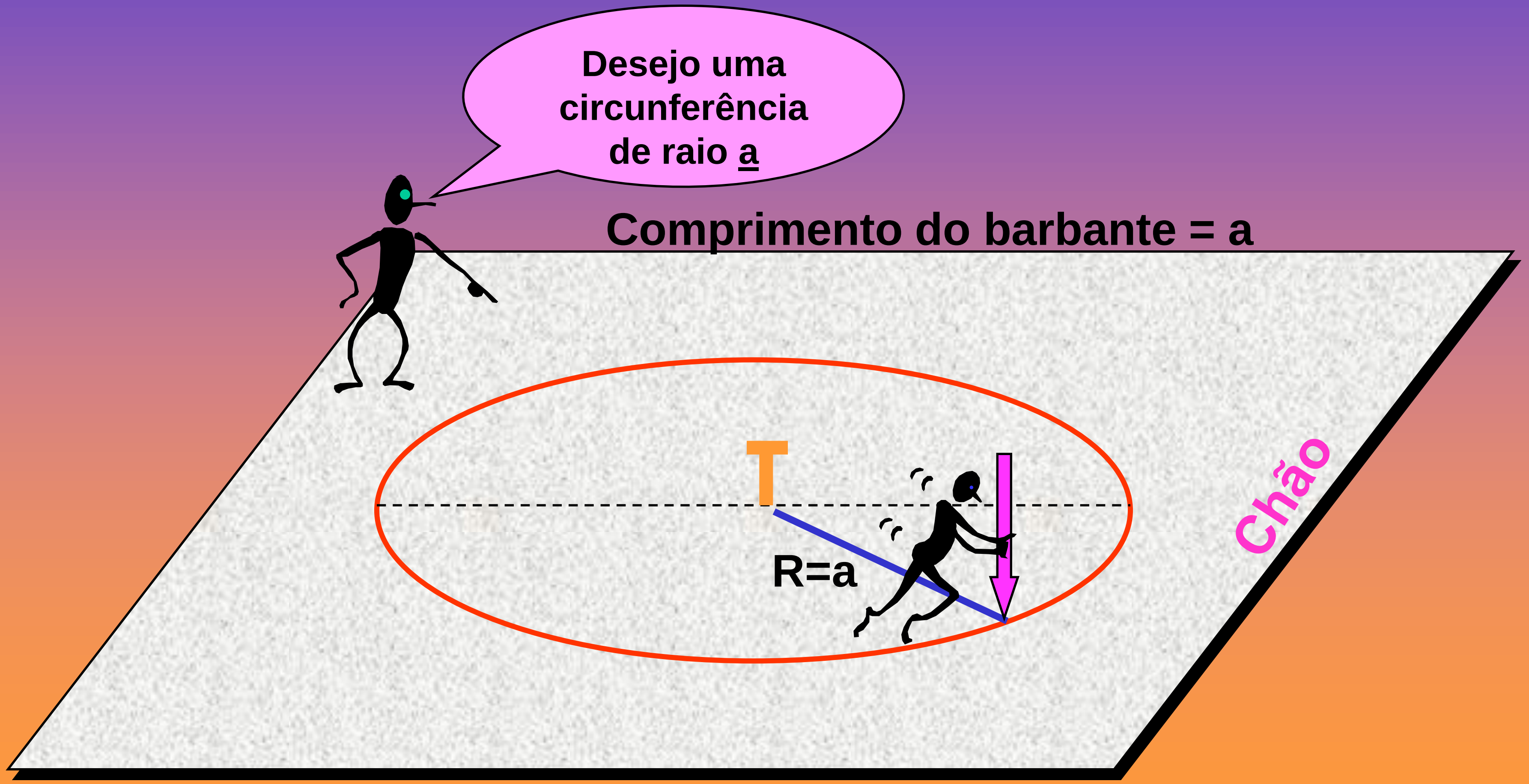
Estudo da elipse



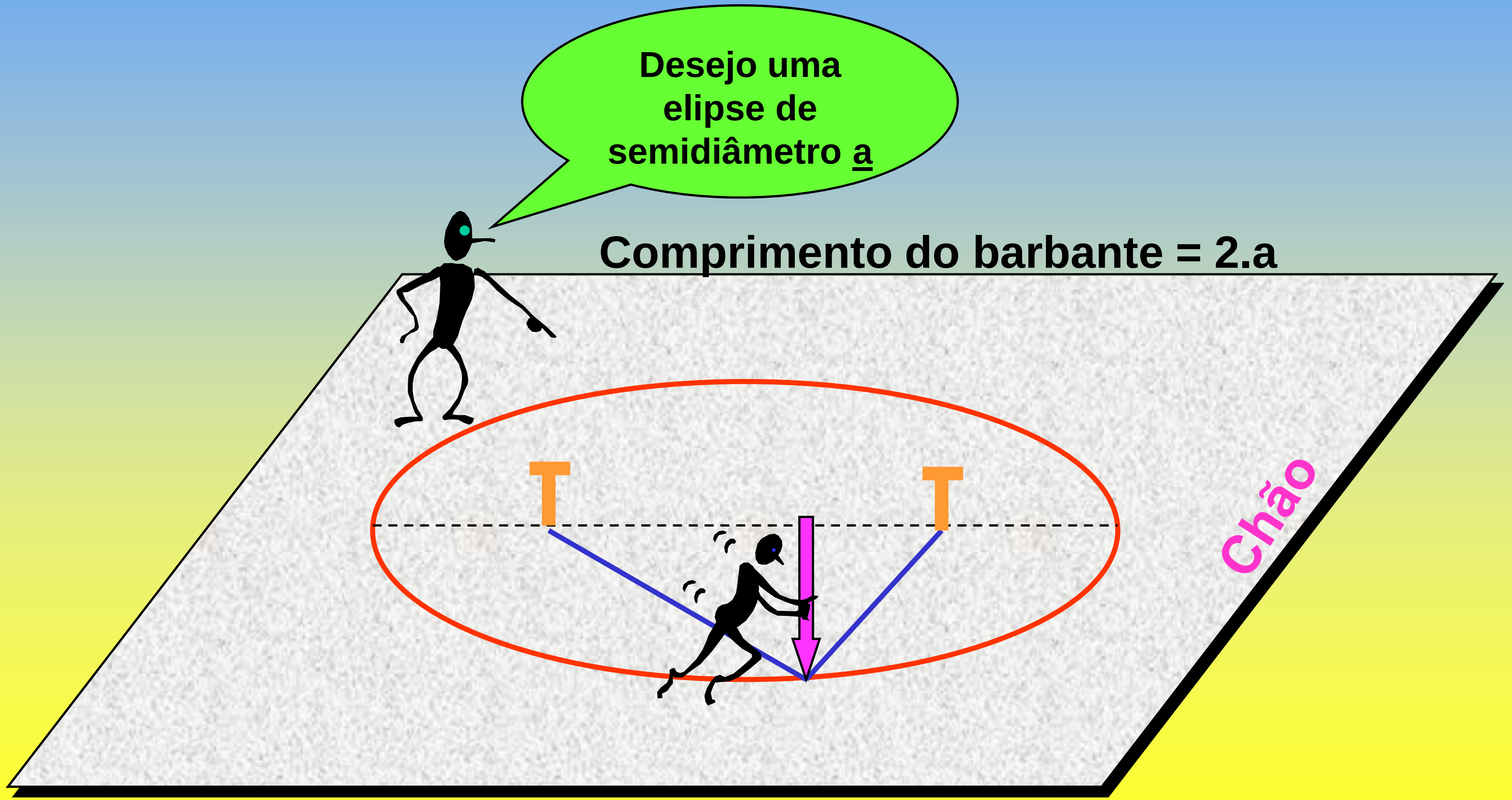
Secções Cônicas
Elipse
Parábola
Circunferência
Hipérbole
Eixo
Geratriz

Definição de elipse e de seus elementos principais

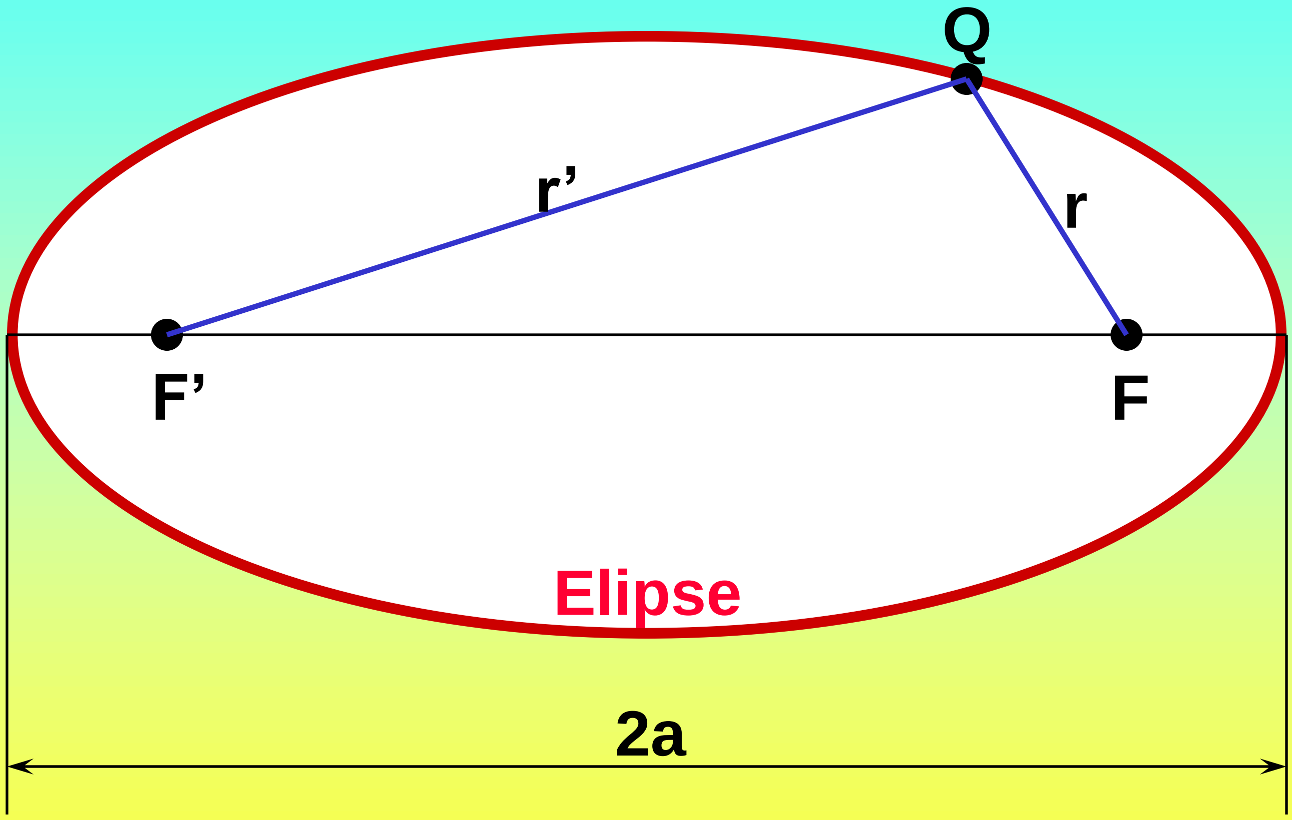
Traçar uma circunferência



Traçar uma elipse

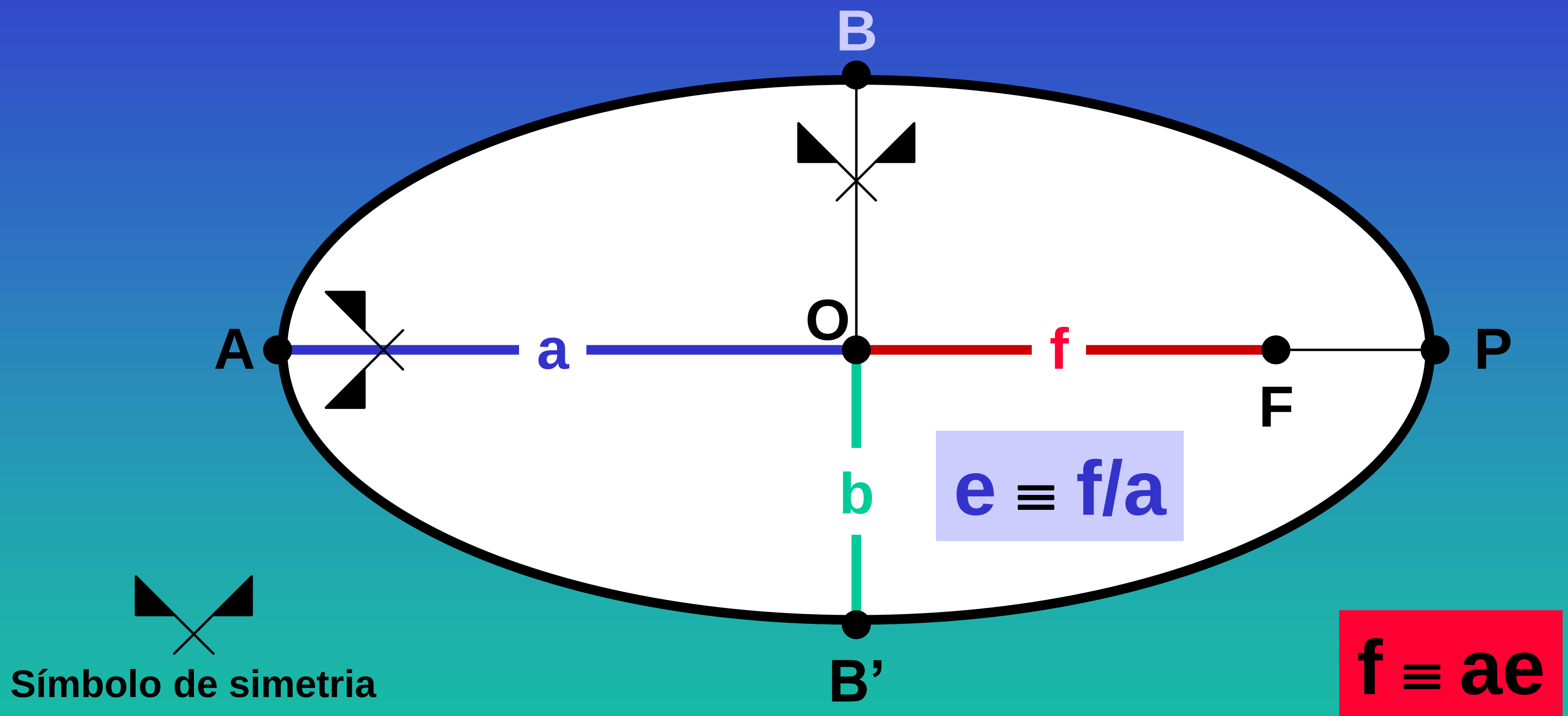


Definição de uma elipse



$$r + r' = 2a$$

Elementos de uma elipse



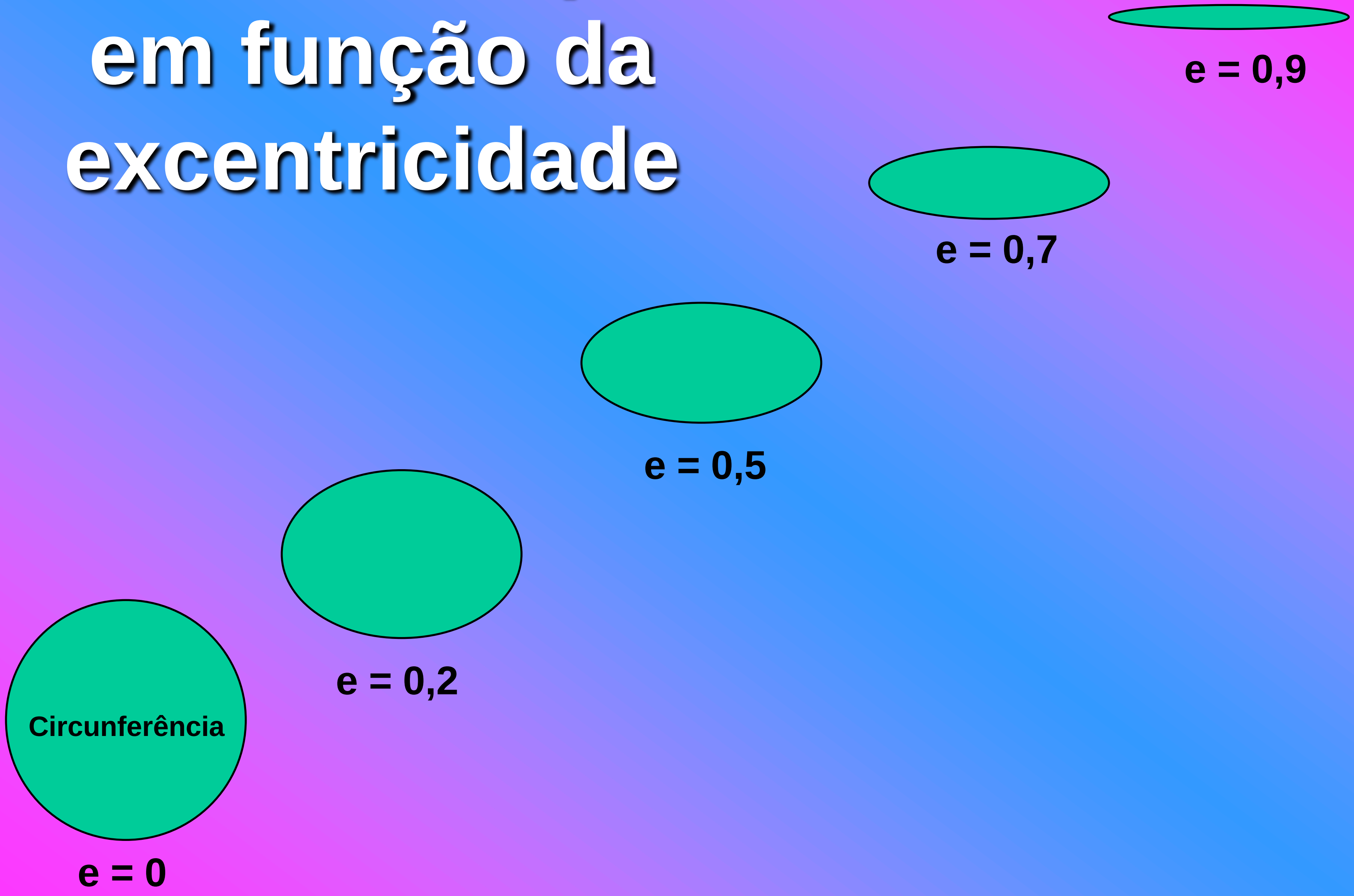
a = semi-eixo maior

b = semi-eixo menor

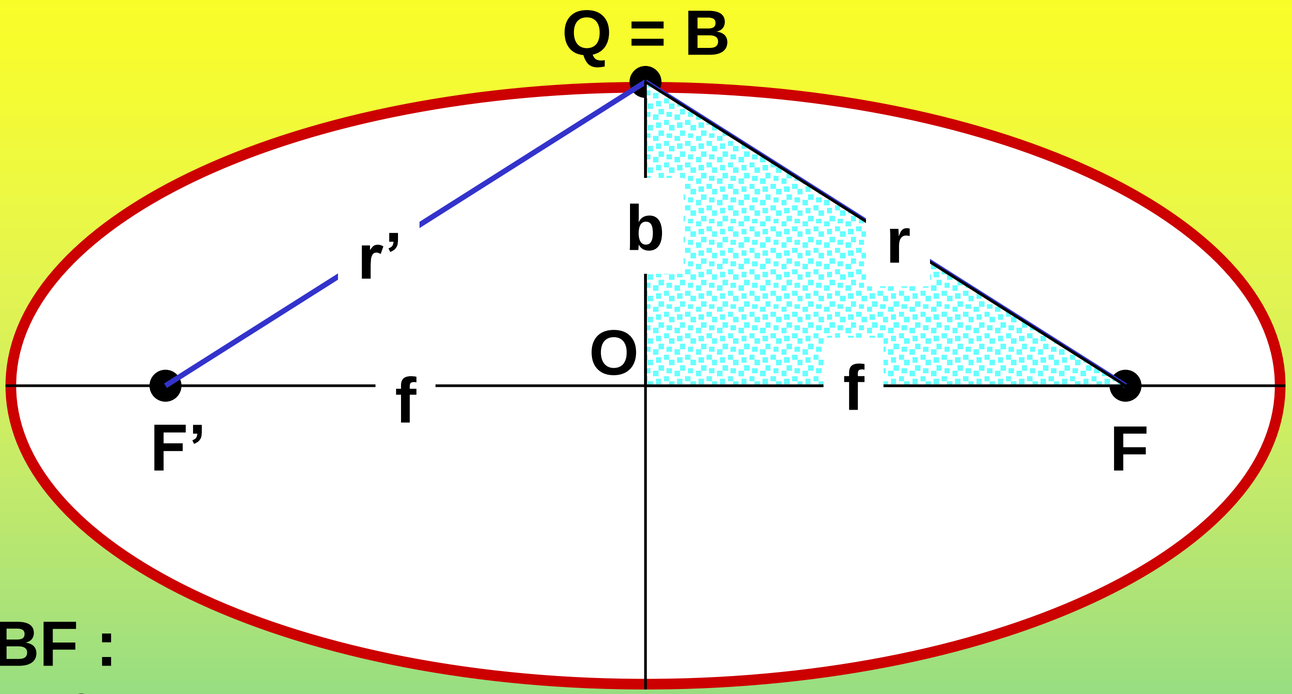
f = distância focal

e = excentricidade

Forma da elipse em função da excentricidade



Semi-eixo menor b



$r + r' \equiv 2a$

$r = r'$

$r = a$

No ΔOBF :

$b^2 = r^2 - f^2$

$b^2 = a^2 - f^2$ ← $f \equiv ae$

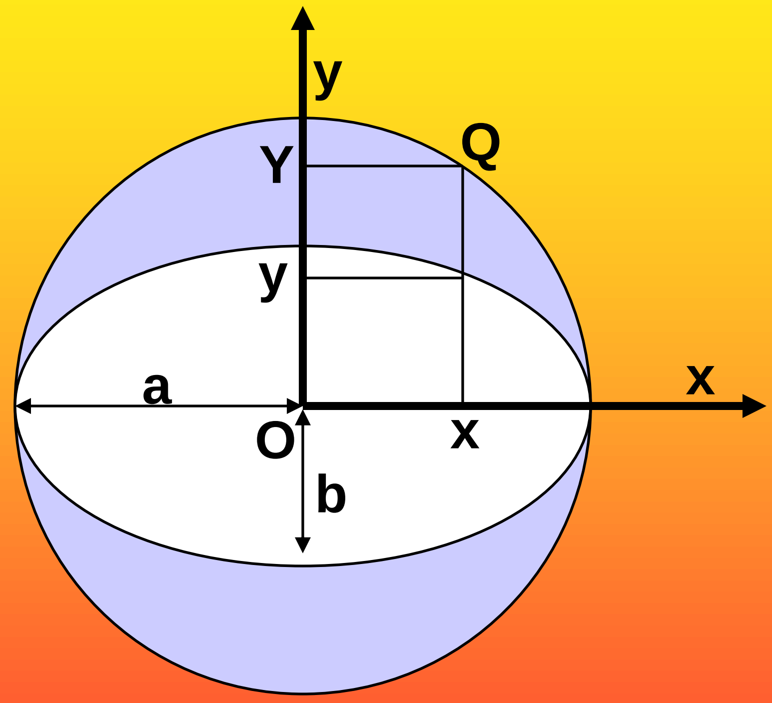
$b^2 = a^2 - (ae)^2$

$b^2 = a^2 - a^2 e^2$

$b^2 = a^2(1 - e^2)$

$b = a \sqrt{1 - e^2}$

Equação da circunferência e da elipse



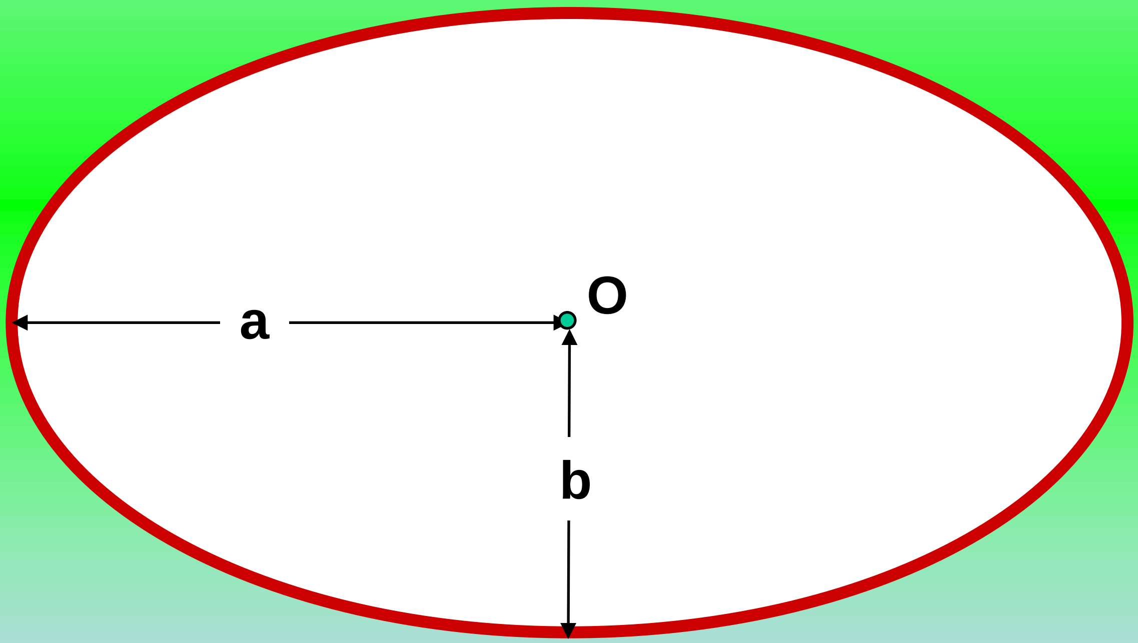
Circunferência

$$x^2 + Y^2 = a^2$$

Elipse

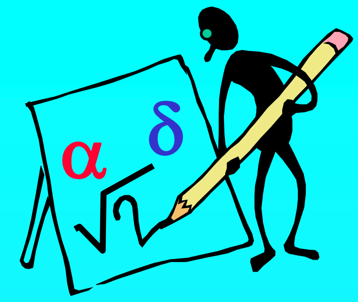
$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$$

Perímetro aproximado de uma elipse



P ≅ 3 π(a+b) / 2 - √{a.b}

Velocidade média de translação da Terra



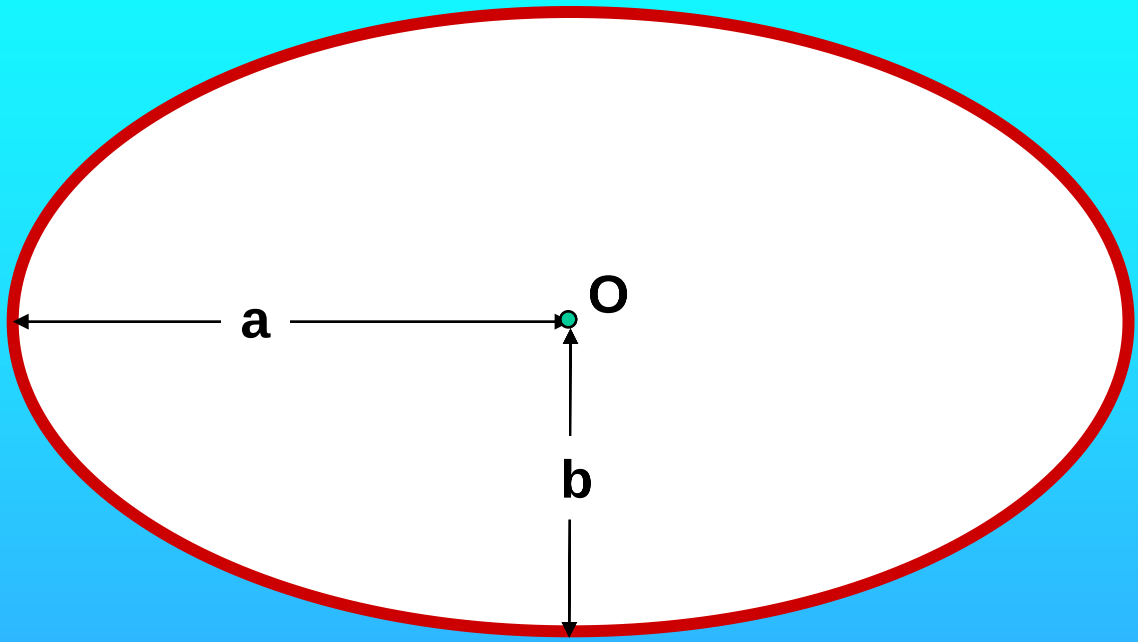
$v = P / T$

$P \cong 3\,\pi(\ a+b\ ) / 2 - \sqrt{\{a.b\}}$

$T \cong 365{,}25$ dias

$a = 1$ UA $\cong 150.000.000$ km

$e = 0{,}01673$



$b = a \sqrt{\{1- e^2\}}$

$b = 1 \sqrt{\{1- 0{,}01673^2\}}$

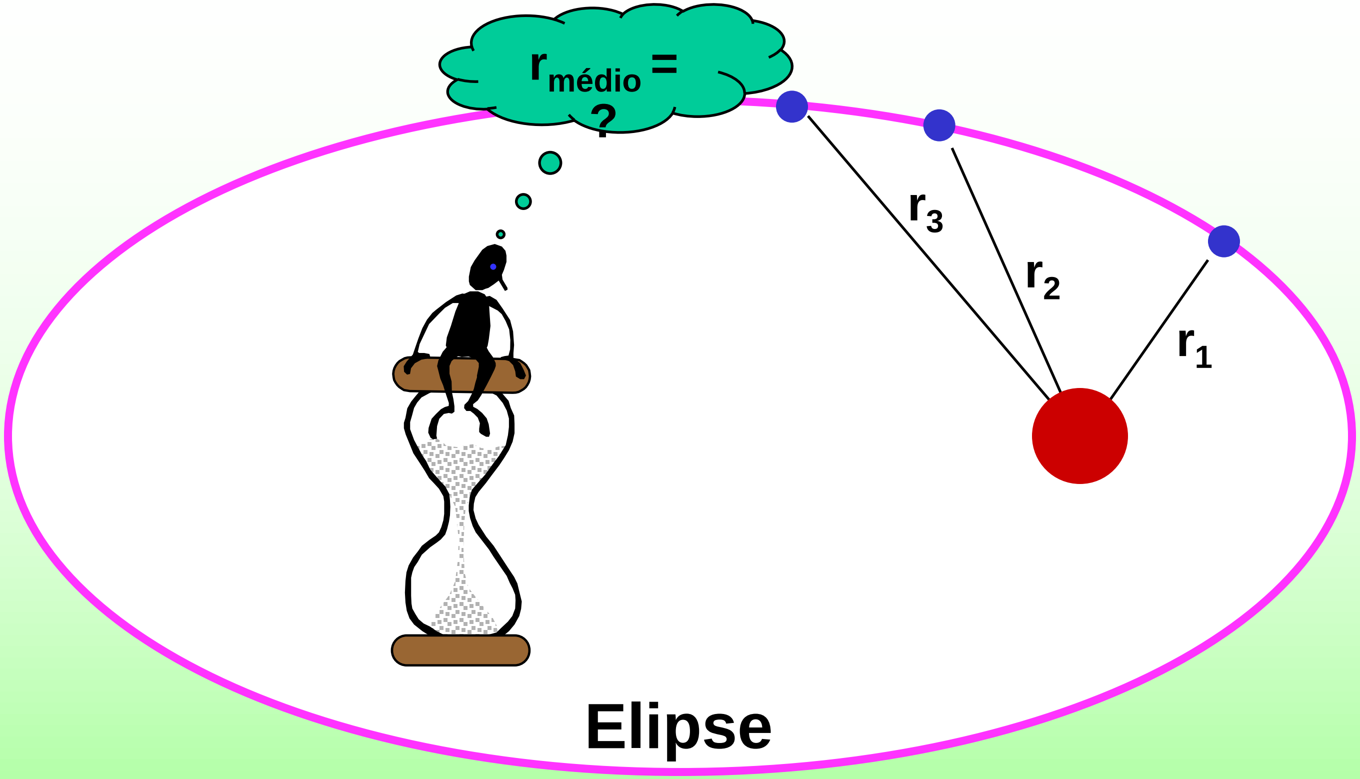
$b = 0{,}999.860.043.8$

$P \cong 3\,\pi(\ 1+ 0{,}999.860.043.8\ ) / 2 - \sqrt{\{1 \times 0{,}999.860.043.8\}}$

$P \cong 8{,}424.188.413.1$ UA $\cong 1.263.628.261{,}962$ km

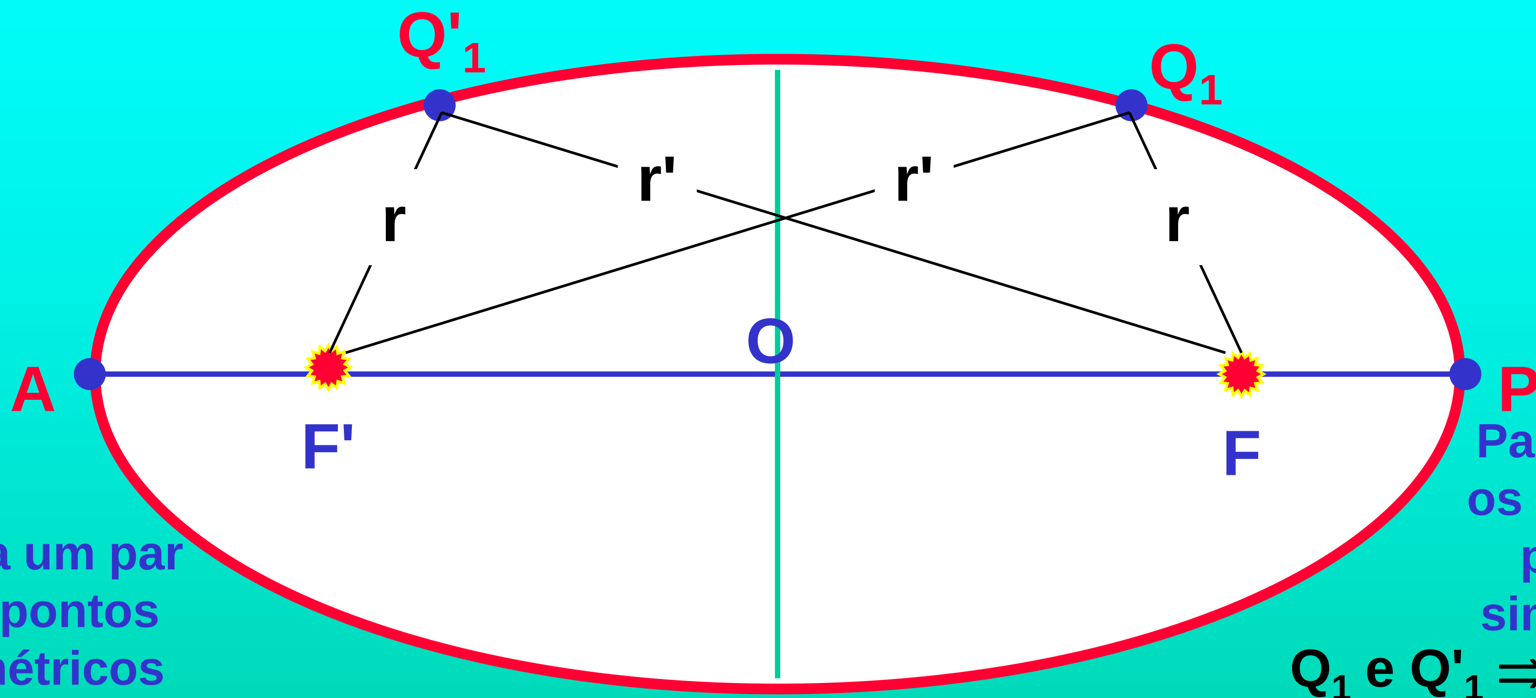
$v = 1.263.628.261{,}962$ km / $365{,}25$ d

$v \cong 3.459.625$ km/dia $\cong 40$ km/s



Quanto vale o raio orbital médio ao longo de um ciclo?

Mostrar que a média dos raios orbitais é o semi-eixo maior



Para um par de pontos simétricos

$Q_1 \Rightarrow r + r' = 2a$

$Q'_1 \Rightarrow r' + r = 2a$

$r + r' = 2a$

Média

$(r + r') / 2 = (2a) / 2$

$r_1 = a$

Para todos os pares de pontos simétricos

Q_1 e $Q'_1 \Rightarrow r_1 = a$

Q_2 e $Q'_2 \Rightarrow r_2 = a$

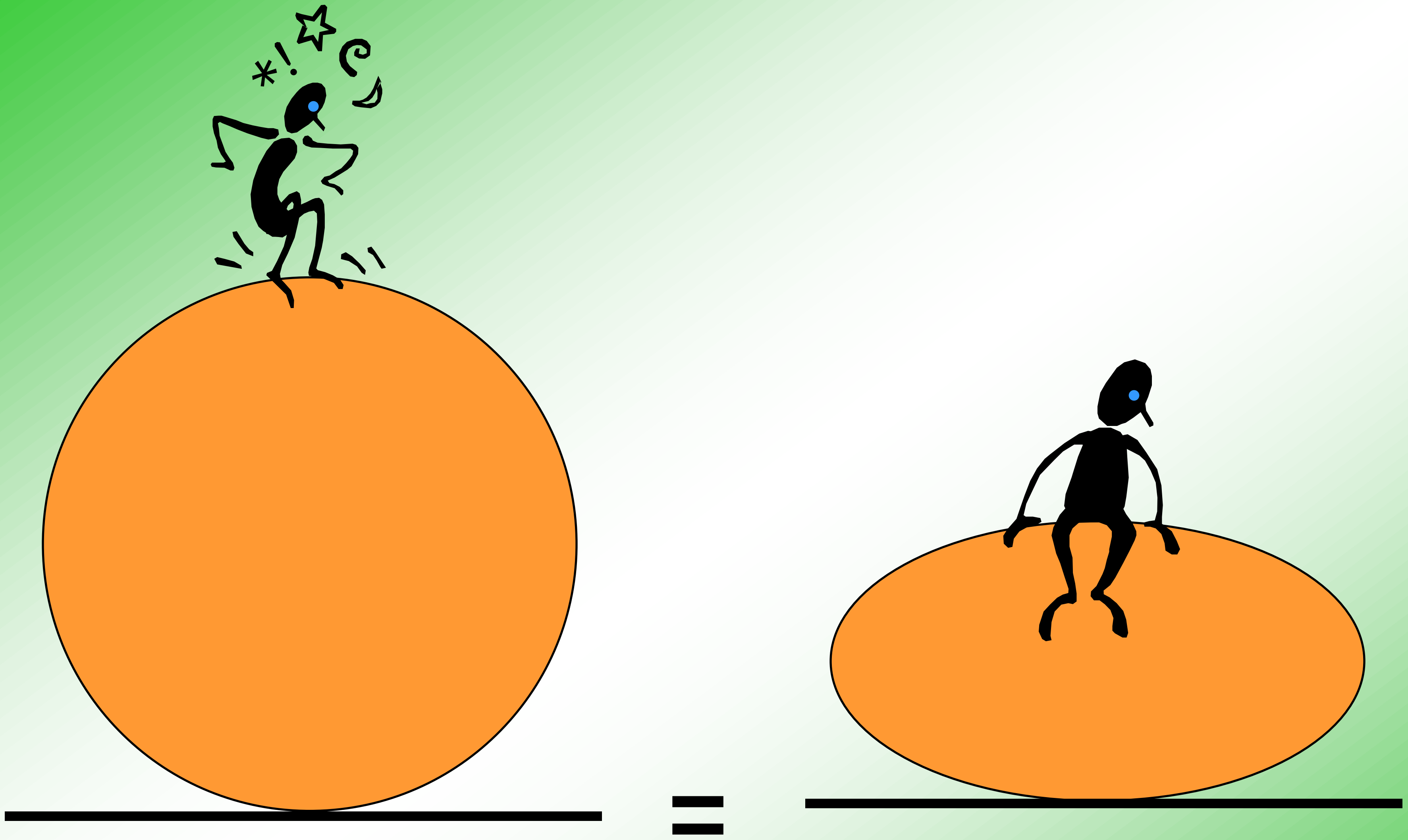
...

Q_N e $Q'_N \Rightarrow r_N = a$

$r_1 + r_2 + ... + r_N = N.a$

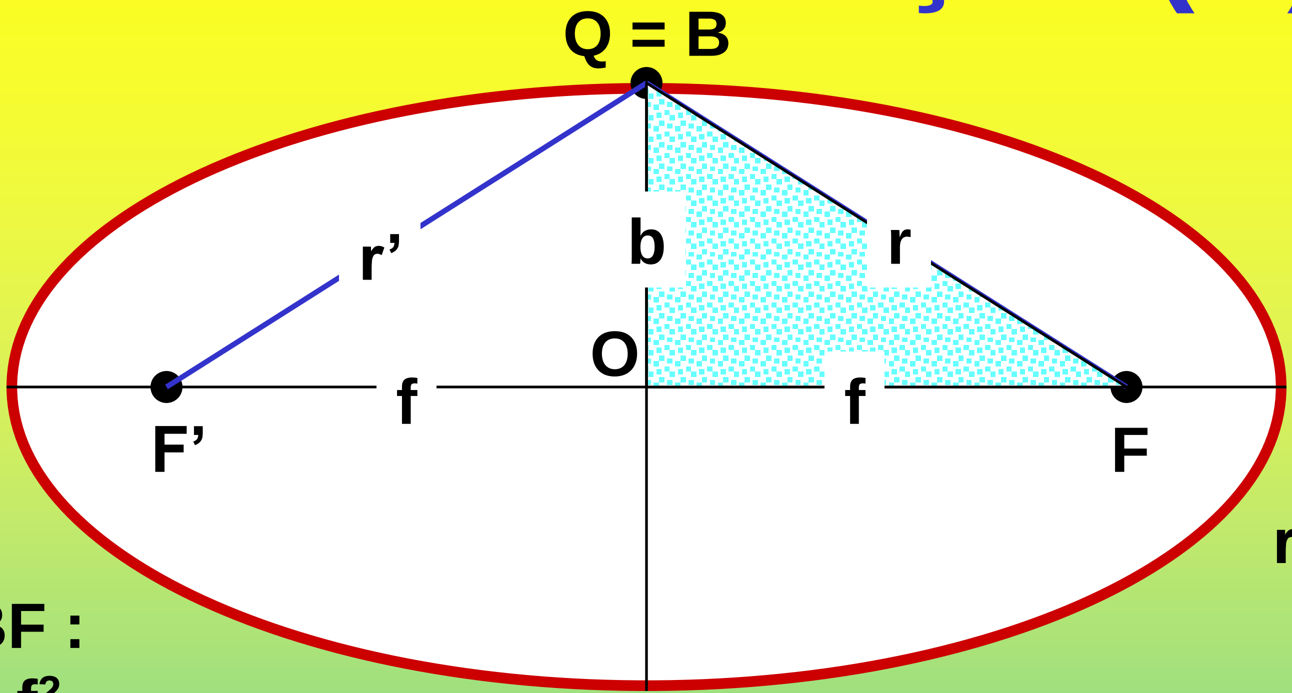
$(r_1 + r_2 + ... + r_N) / N = a$

$\underline{r} = a$



Circunferência achatada = Elipse

Fator de contração (C)



$r + r' \equiv 2a$

$r = r'$

$r = a$

No ΔOBF :

$b^2 = r^2 - f^2$

$b^2 = a^2 - f^2$ ← $f \equiv ae$

$b^2 = a^2 - (ae)^2$

$b^2 = a^2 - a^2 e^2$

$b^2 = a^2(1 - e^2)$

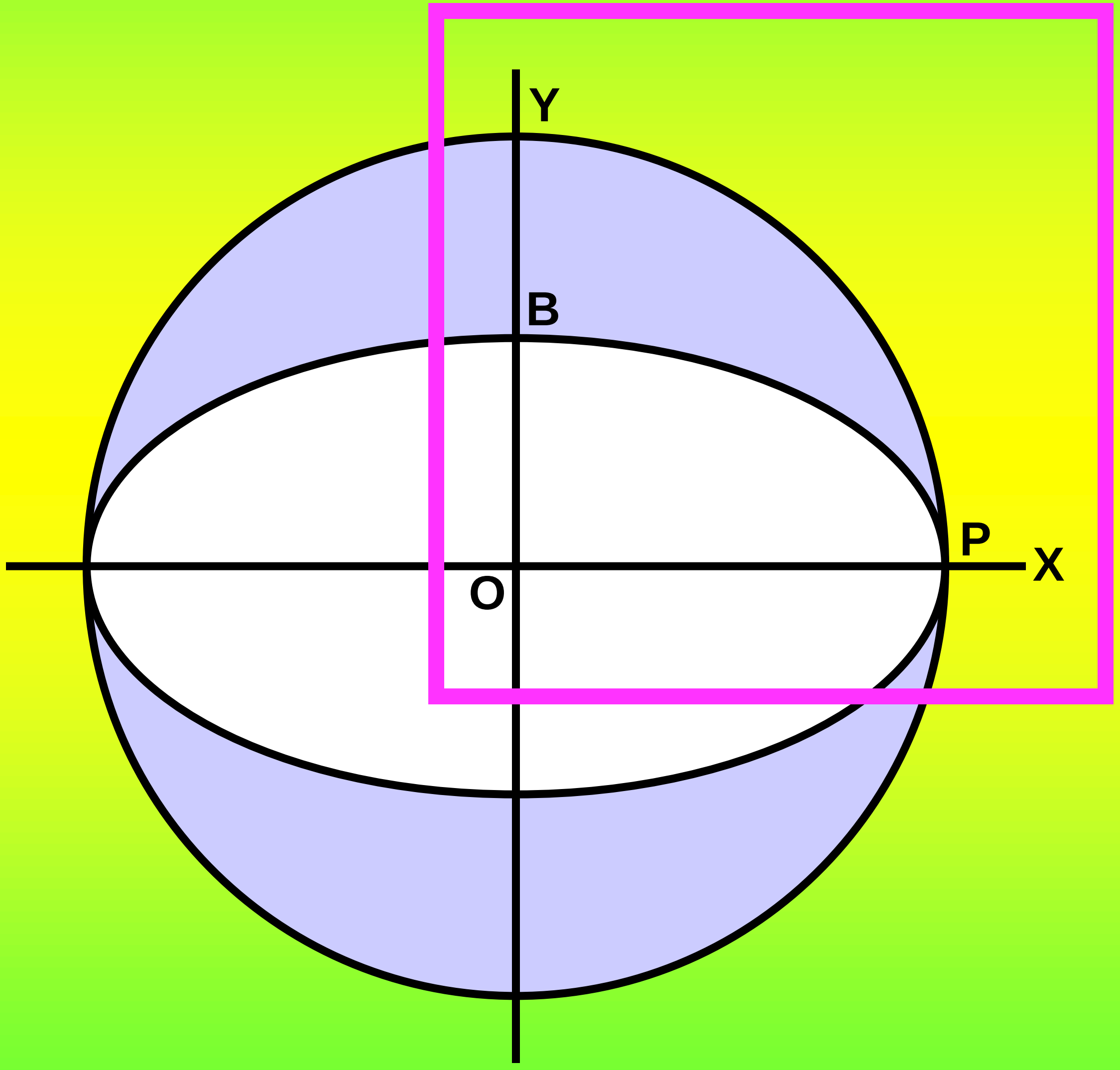
$b = a \sqrt{1 - e^2}$

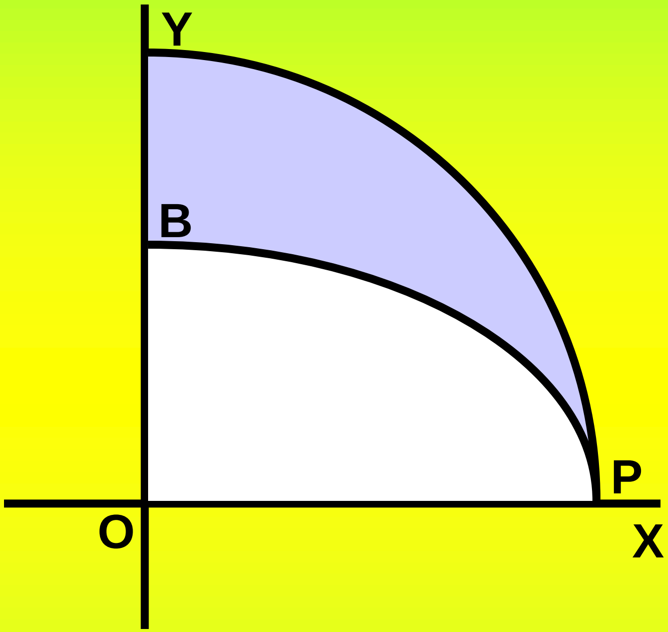
$C \equiv \sqrt{1 - e^2}$

$b = aC$

Convenção de representação

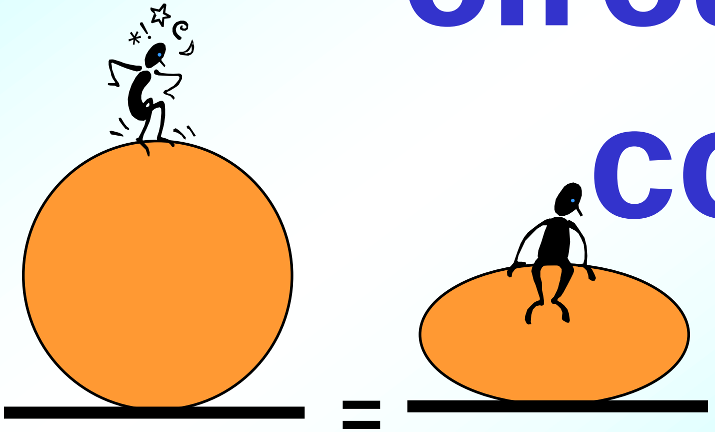
Quadrante elíptico



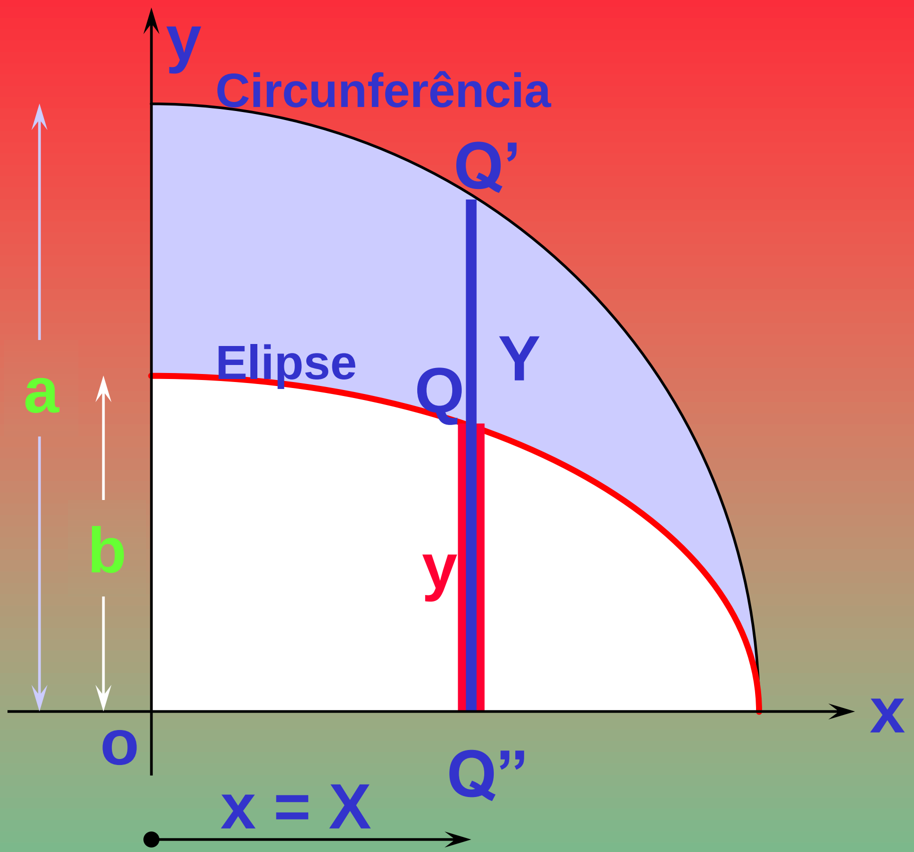


Quadrante de círculo
&
Quadrante de elipse

Elipse considerada como uma circunferência contraída



Elipse = Circunferência contraída



Para a circunferência:

$X^2 + Y^2 = a^2$

Como x = X, então:

$x^2 + Y^2 = a^2$

$x^2 = a^2 - Y^2$

Para a elipse:

$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

$(a^2 - Y^2) / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

$1 - Y^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

$y^2 / b^2 = Y^2 / a^2$

$y^2 = Y^2 (b^2 / a^2)$

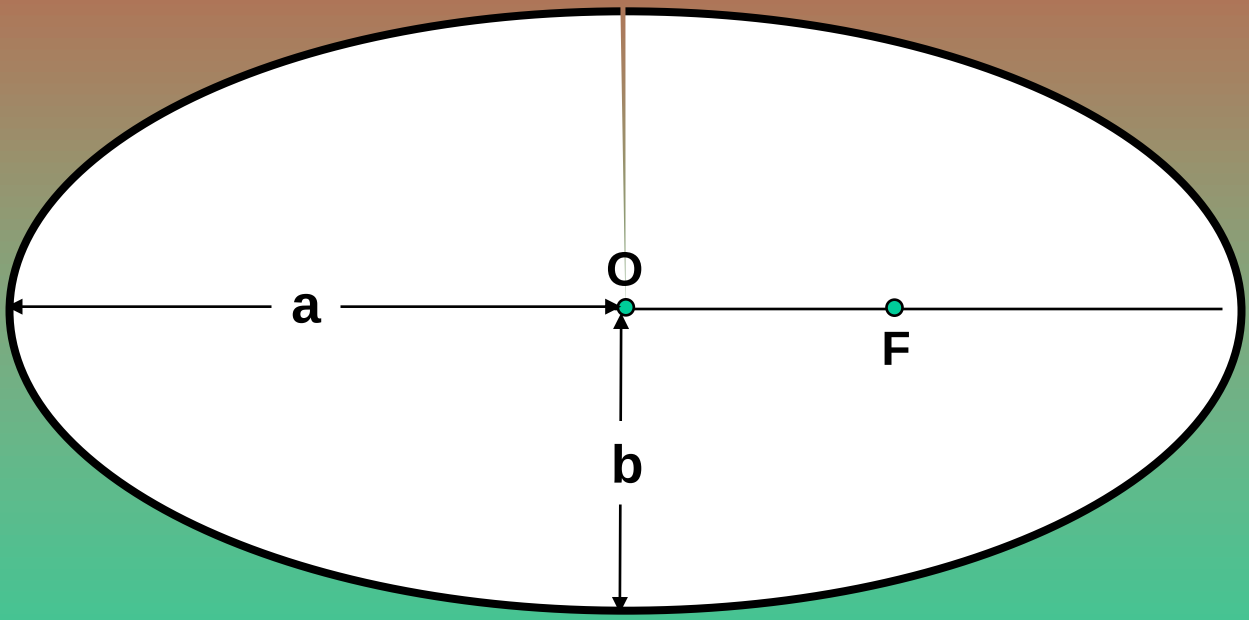
$y = Y (b / a)$

b = aC ⇨

$y = Y (aC / a)$ ⇨ **$y = YC$**

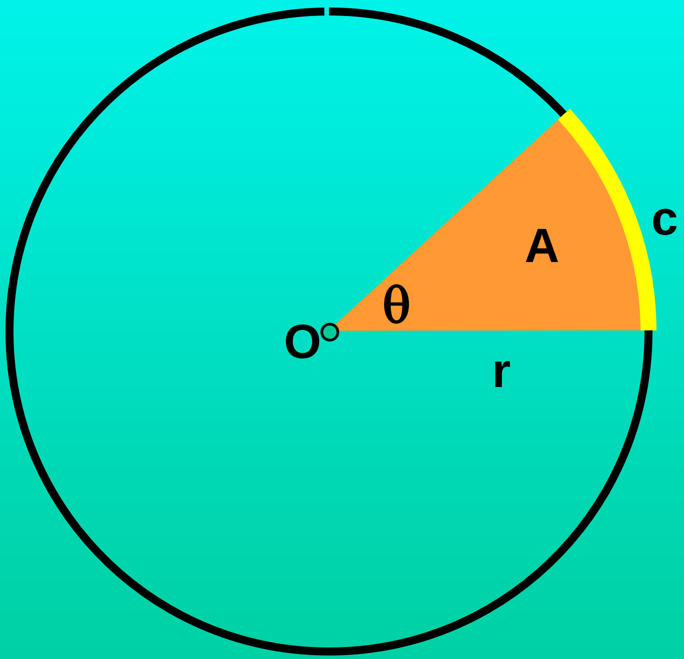
Áreas envolvidas com a elipse

Área da elipse



A = π.a.b

Área de um setor circular



Medida em graus

$360^0 \rightarrow \pi r^2$

$\theta^0 \rightarrow A$

$A = \pi r^2 . \theta^0 / 360^0$

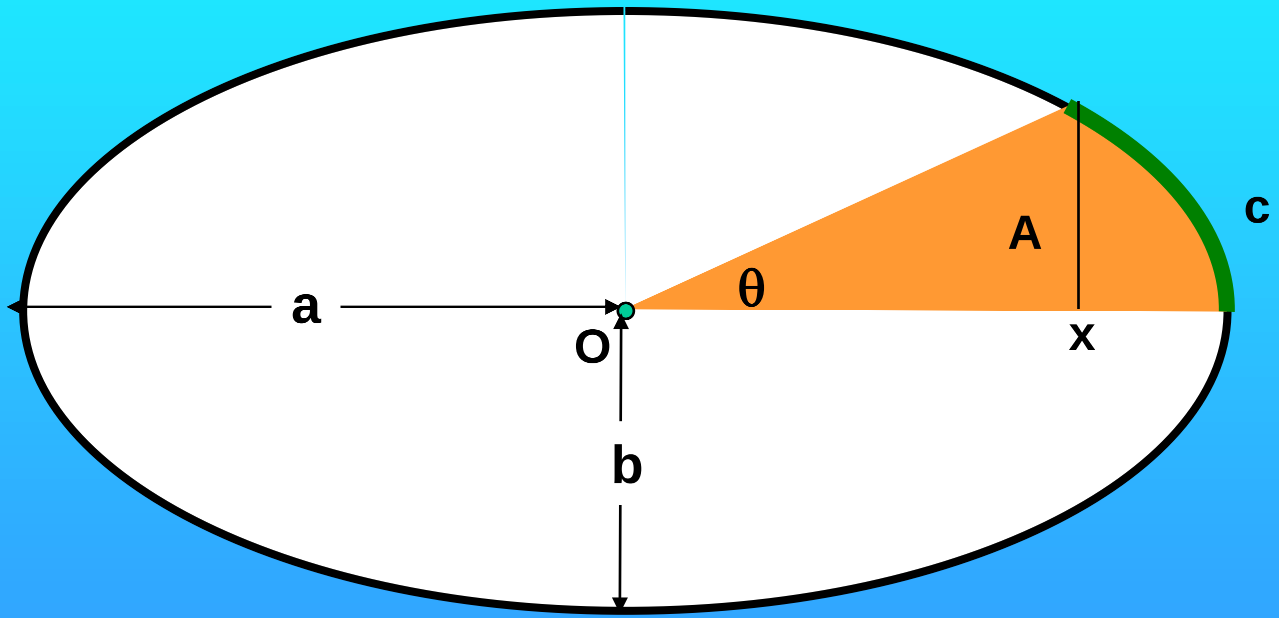
Medida em radianos

$2\pi \rightarrow \pi r^2$

$\theta \rightarrow A$

$A = r^2 . \theta / 2$

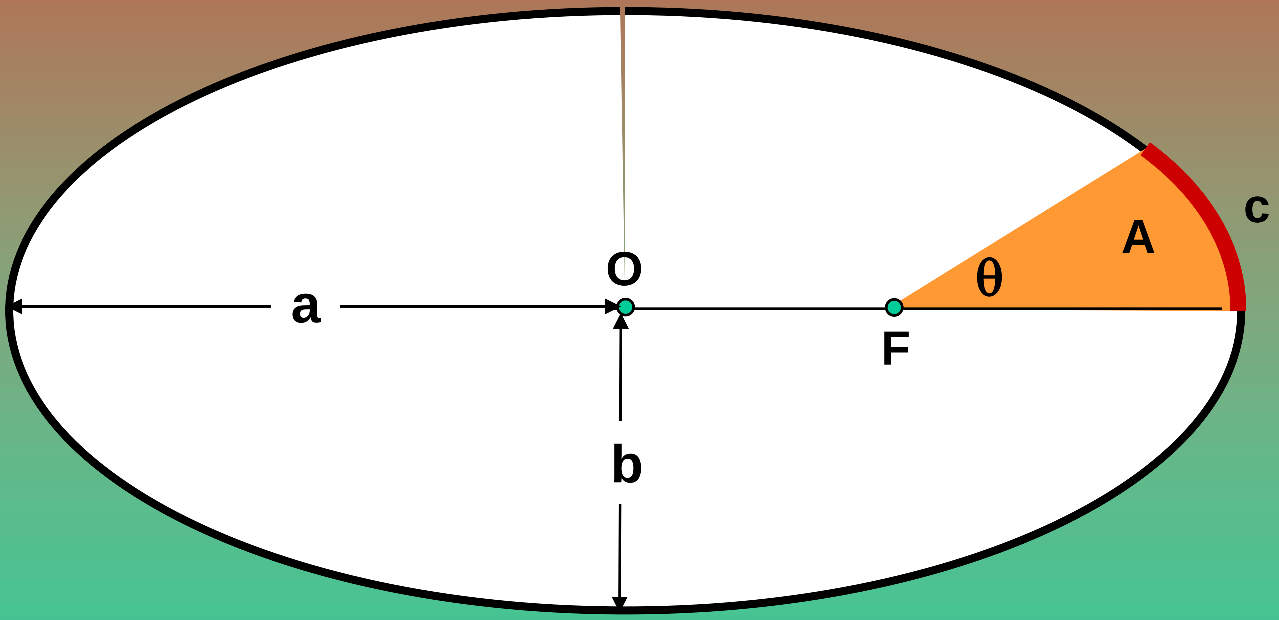
Setor elíptico



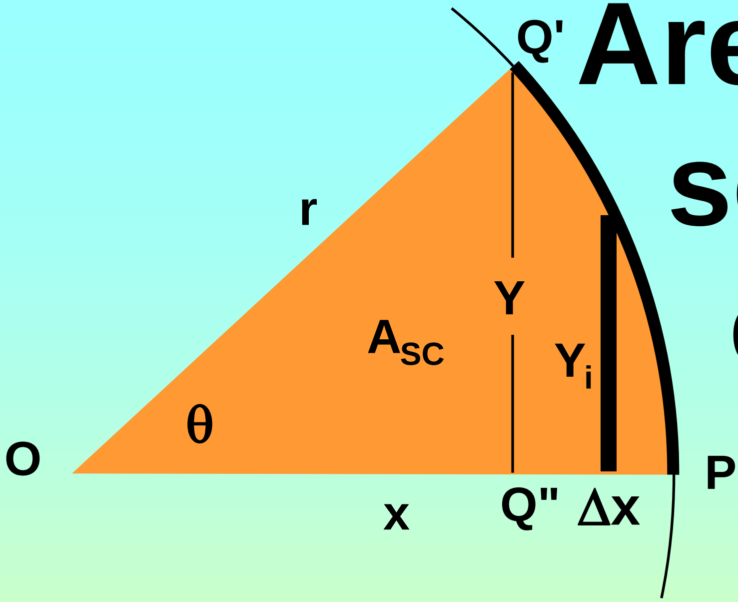
$$A = (a.b / 2) . [\mathit{arccos} (x / a)]^{rad}$$

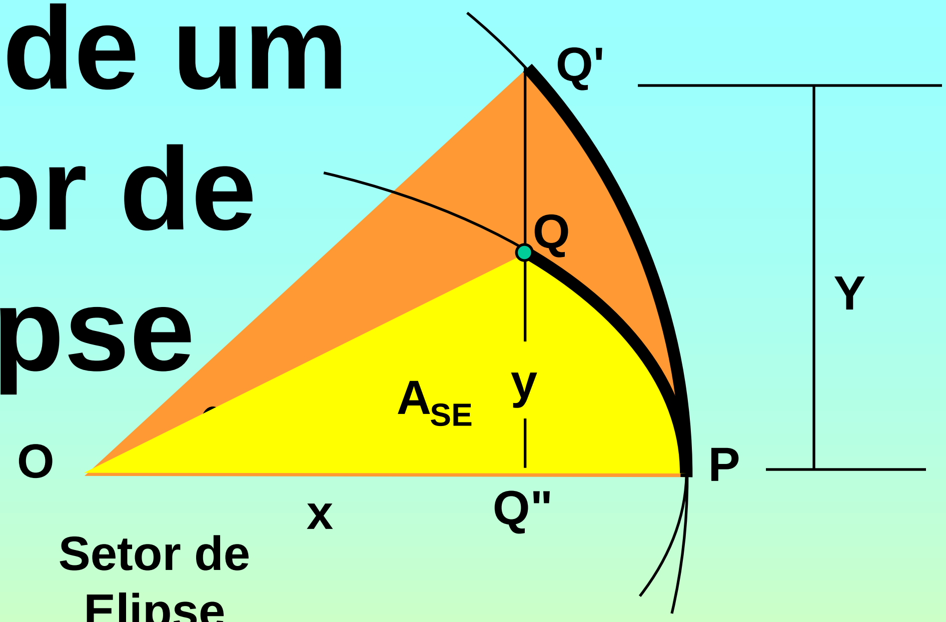
Vamos tentar não usar!

Setor ' kepleriano'



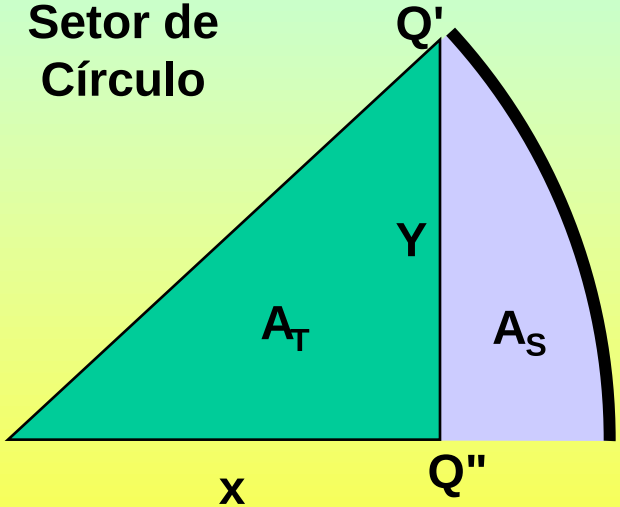
Área de um setor de elipse





Setor de Elipse

Setor de Círculo



$A_1 = x\ y\ /2$

$y = Y.C$

$A_2 = \sum y_i.\ \Delta x$

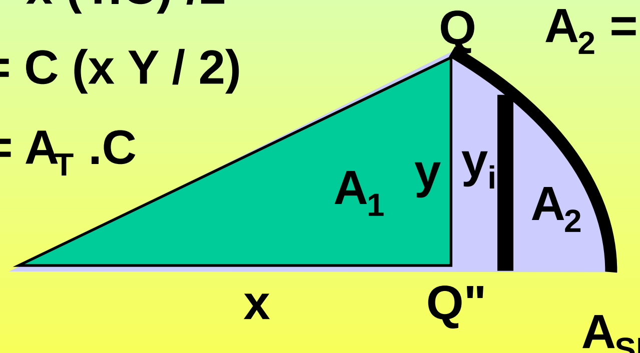
$A_1 = x\ (Y.C)\ /2$

$A_2 = \sum Y_i.C.\ \Delta x$

$A_1 = C\ (x\ Y\ /\ 2)$

$A_2 = A_S\ .\ C$

$A_1 = A_T\ .C$



$A_{SE} = A_1 + A_2$

$A_{SE} = A_T\ .C + A_S\ .\ C$

$A_{SE} = (A_T\ + A_S\ )\ C$

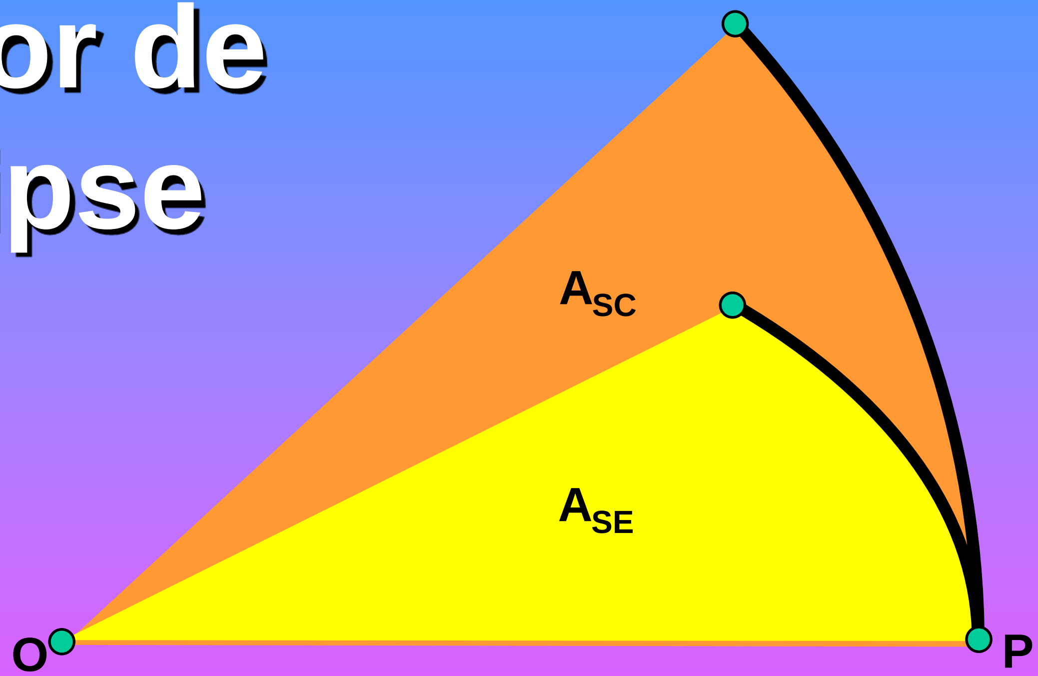
$A_{SE} = A_{SC}\ .\ C$

$A_{SC} = A_T + A_S$

$A_T = x\ Y\ /\ 2$

$A_S = \sum Y_i.\ \Delta x$

Área de um setor de elipse



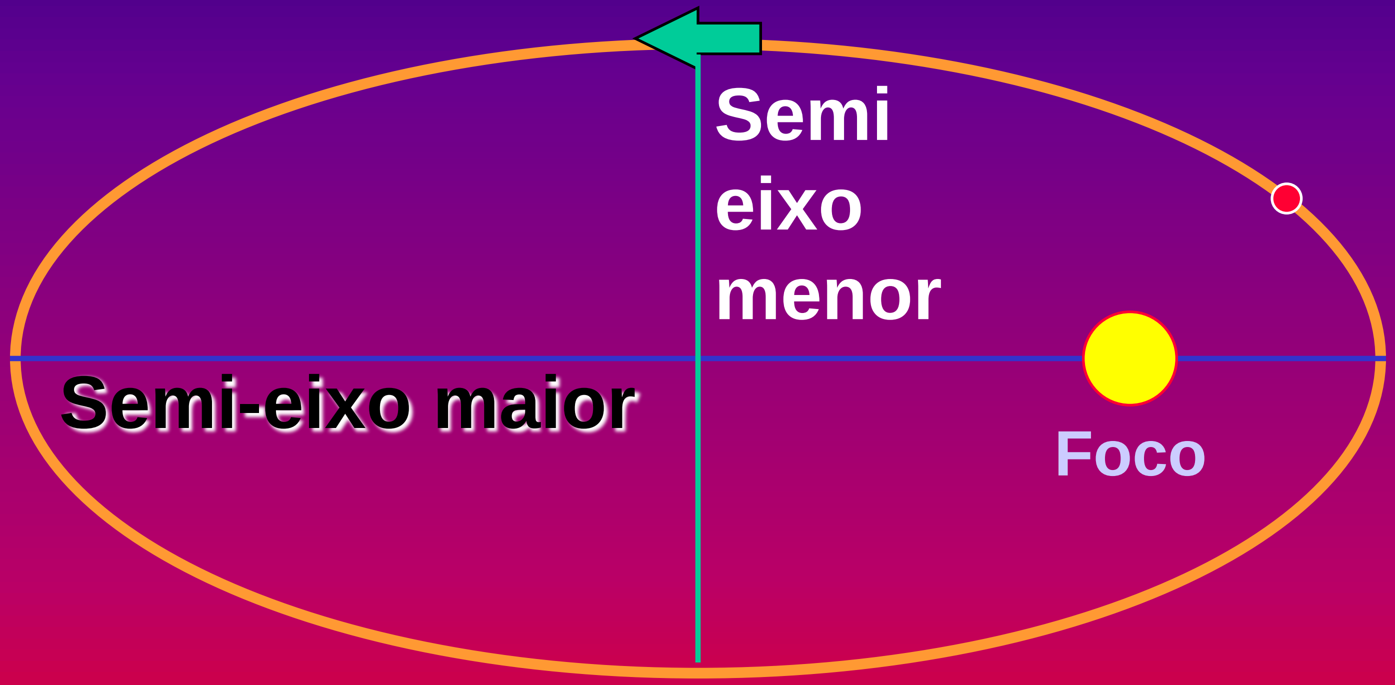
$C \equiv \sqrt{\{1 - e^2\}}$

$$A_{SetorEl\acute{i}ptico} = A_{SetorCircular} \cdot C$$

Kepler e os movimentos elípticos

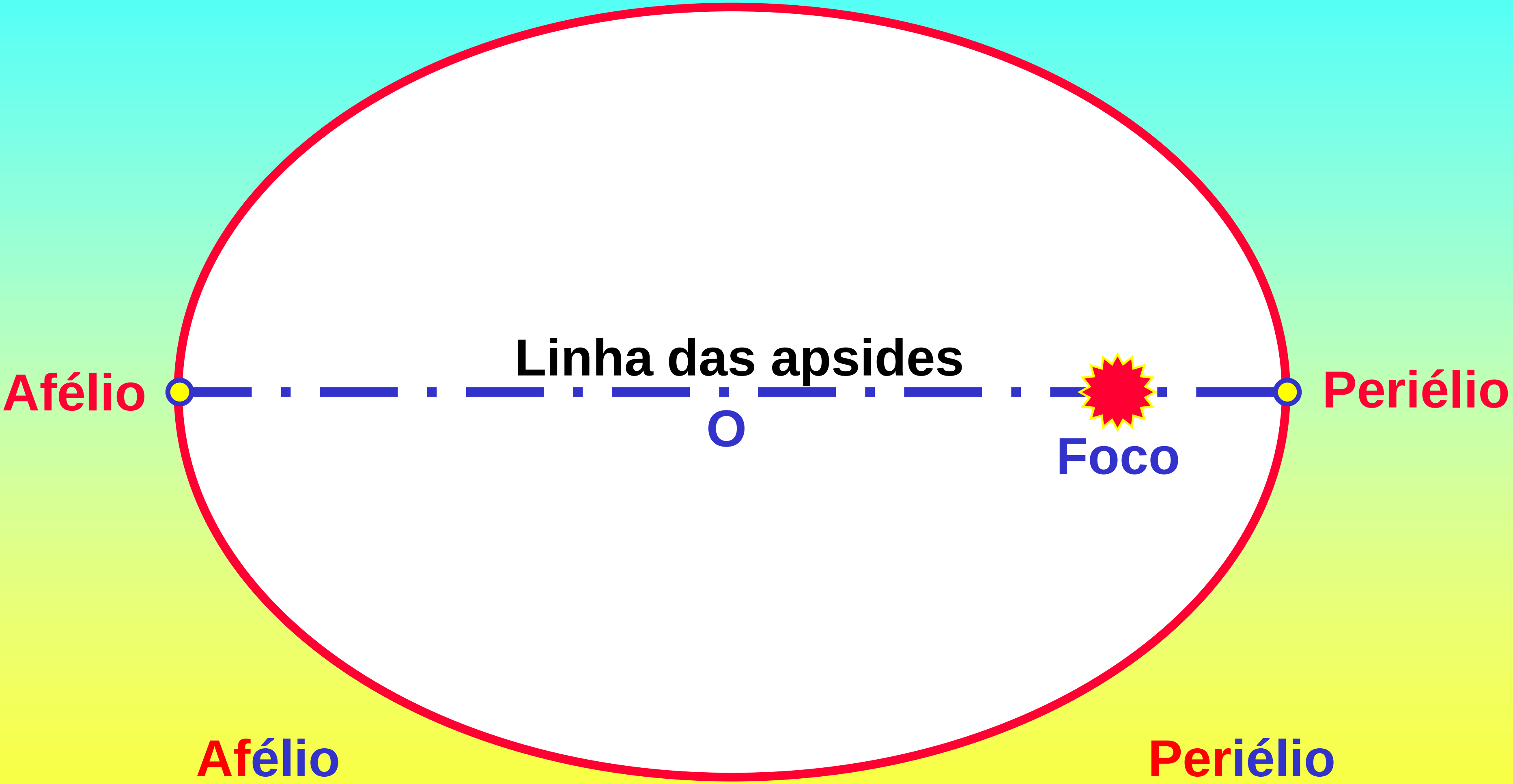
Primeira Lei de Kepler

(1571 - 1630)



Um corpo ligado a outro gravitacionalmente gira em torno dele numa órbita elíptica, sendo que um deles ocupa o foco da elipse.

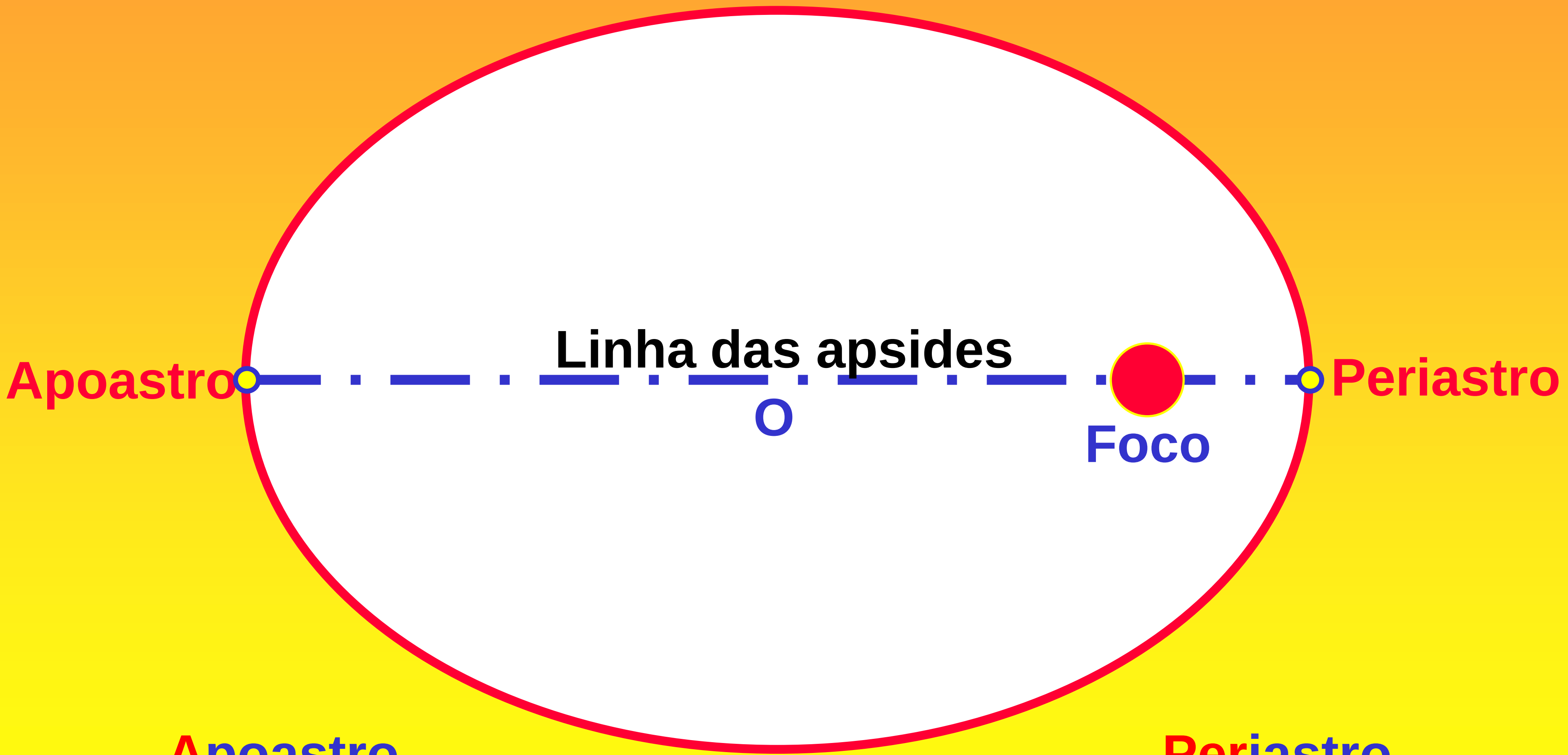
Afélio e Periélio



Afélio
Ponto da órbita mais afastado do foco

Periélio
Ponto da órbita mais perto do foco

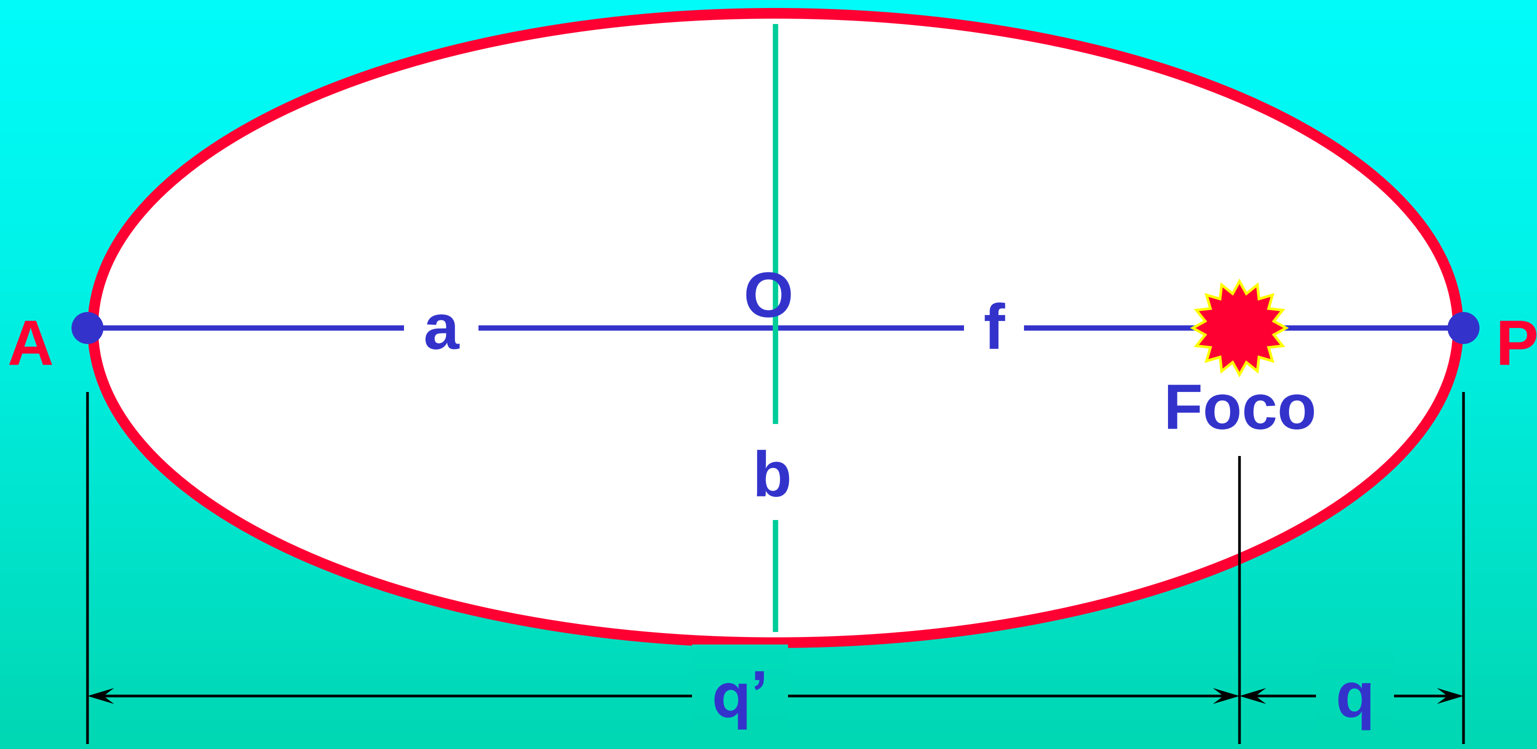
Apoastro e Periastro



Apoastro
Ponto da órbita mais afastado do foco

Periastro
Ponto da órbita mais perto do foco

Raio vetor no Afélio e no Periélio



Afélio:

$q' = a + f$

$q' = a + ae$

$q' = a(1+e)$

Periélio:

$q = a - f$

$q = a - ae$

$q = a(1-e)$

Anomalias

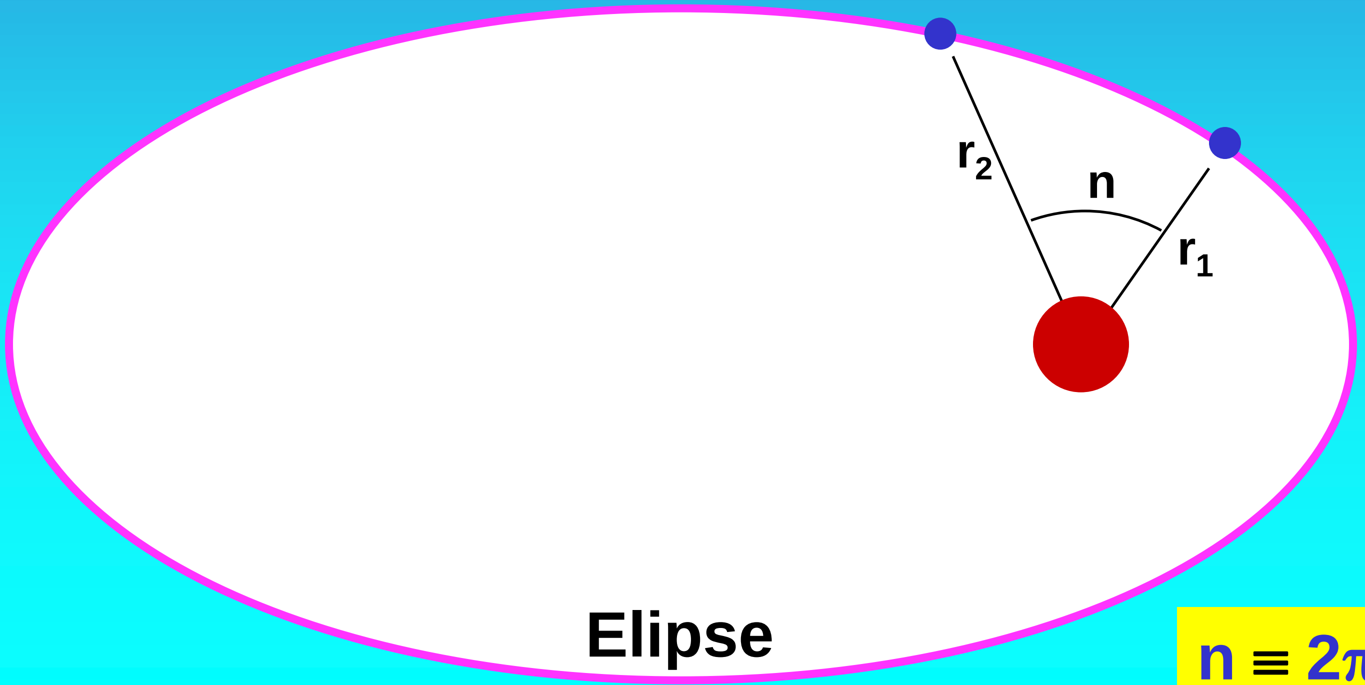
M
u
v

Movimento Médio

T = Período orbital do astro: tempo para dar uma volta completa em torno do Sol

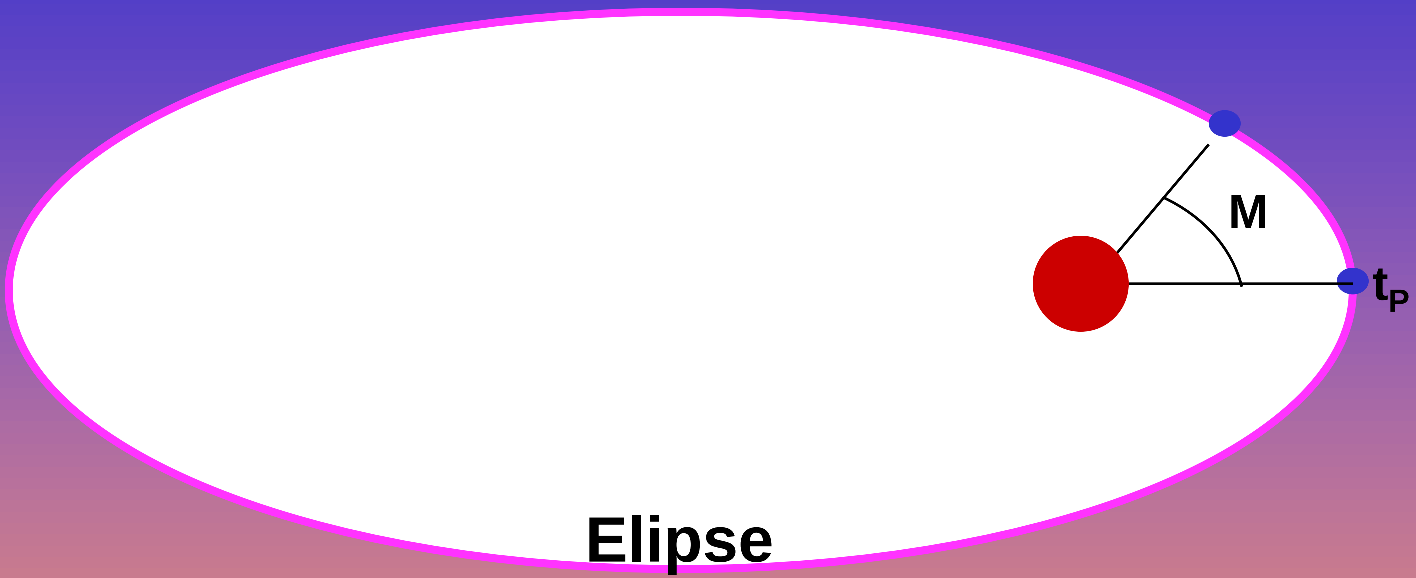
n = Movimento médio: velocidade angular do astro

$n \equiv 360^0 / T$ ^{0}/dia



$n \equiv 2\pi / T$ rad/dia

Anomalia Média



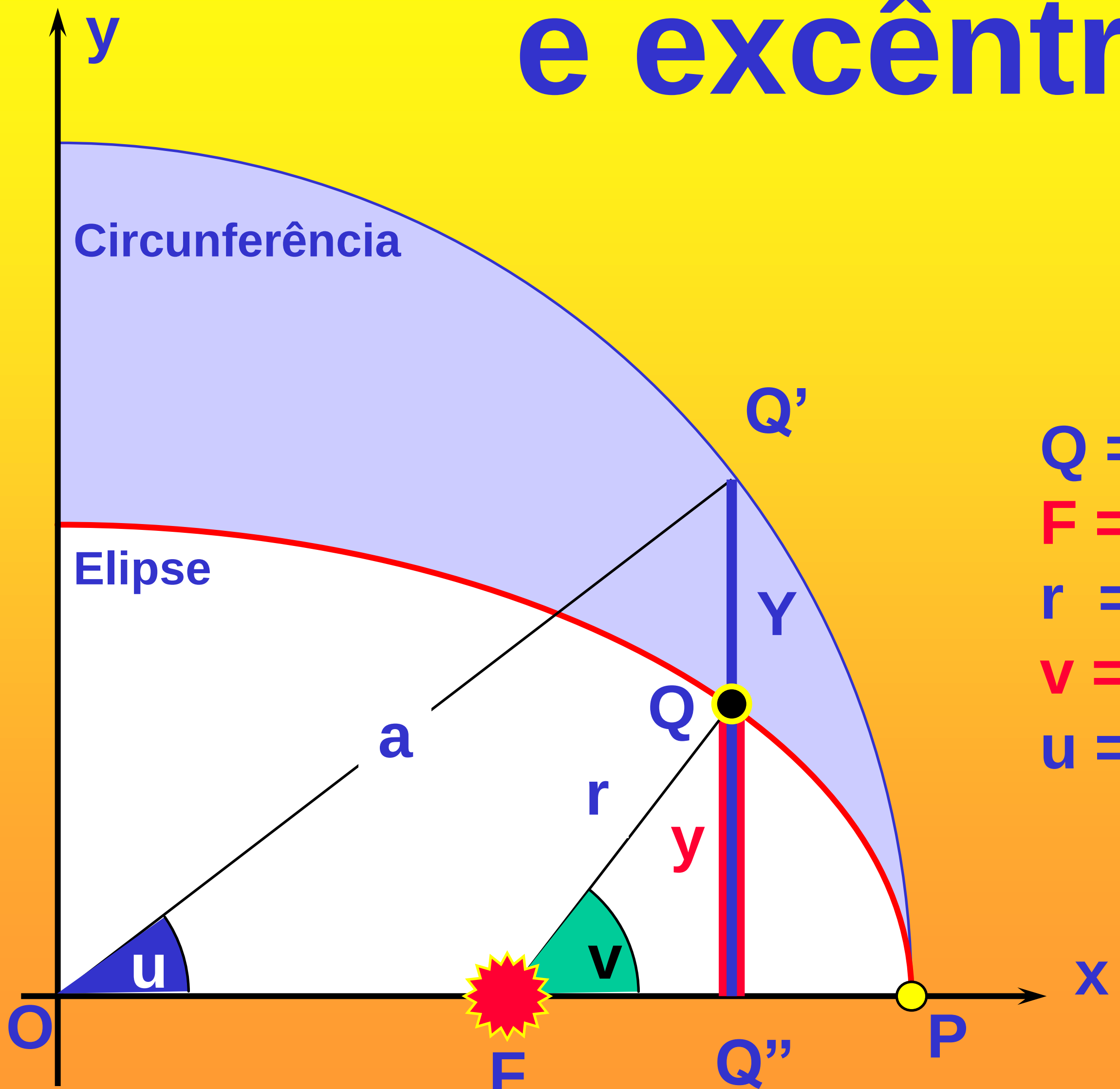
t_p = instante da passagem periélica
t = instante no qual se deseja a posição do astro

M = **Anomalia Média**: ângulo que seria percorrido pelo astro, no intervalo de tempo $(t - t_p)$, se ele tivesse movimento circular uniforme

$$M \equiv n\,(t - t_p)$$

$$n \equiv 360^0 / T$$

Anomalias verdadeira e excêntrica



Q = Astro

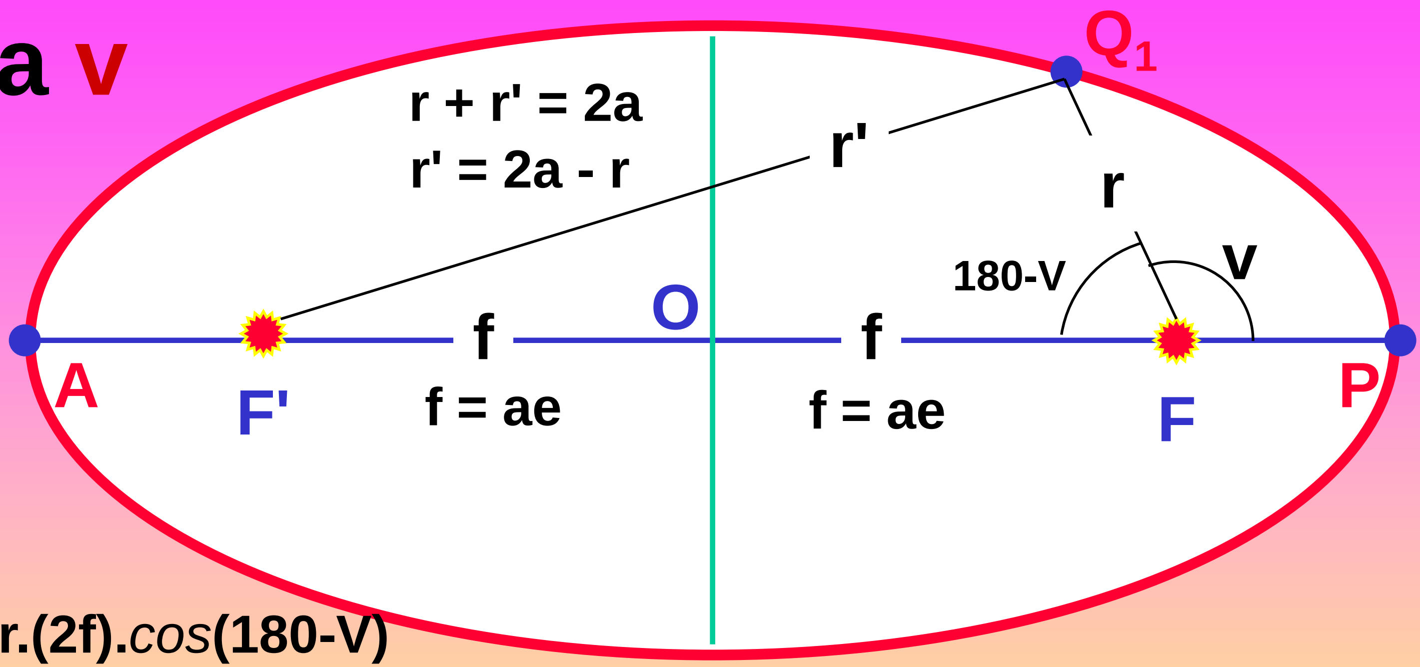
F = Sol

r = raio vetor do astro

v = anomalia verdadeira

u = anomalia excêntrica

Raio orbital r em função da anomalia verdadeira v



$r'^2 = r^2 + (2f)^2 - 2.\ r.(2f).\cos(180-V)$

$(2a - r)^2 = r^2 + 4f^2 + 4.\ r.f.\cos V$

$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4(ae)^2 + 4.\ r.(ae).\cos V$

$4a^2 - 4ar + \# = \# + 4a^2.e^2 + 4.\ r.a.e.\cos V$

$4a^2 - 4a^2.e^2 = 4ar + 4.\ r.a.e.\cos V$

$4a^2 (1-e^2) = 4ar\ (1 + e.\cos V)$

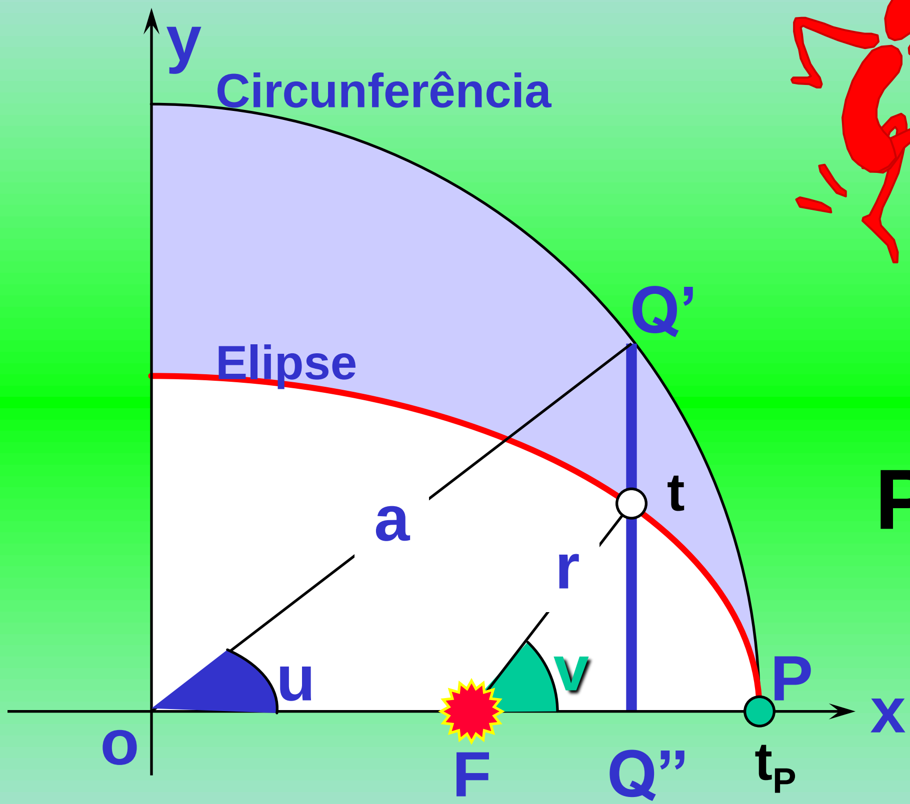
$r = a\,(1-e^2) / (1 + e.\cos V)$

$C \equiv \sqrt{\{1-e^2\}}$

$r = a\,C^2 / (1 + e.\cos V)$

Obtenção da Equação de Kepler

Objetivo de trabalho

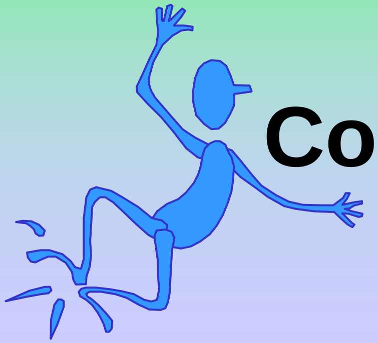


Desejamos:

$$v = f\{t\}$$

Passo intermediário:

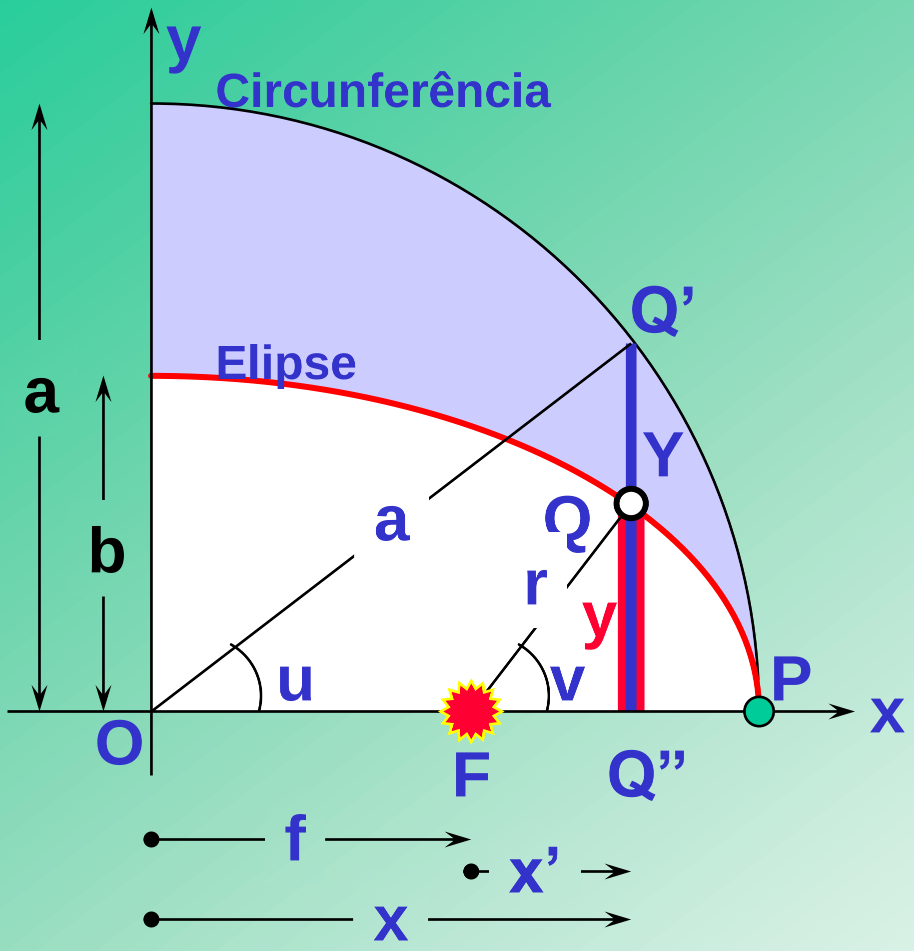
$$v = g\{u\}$$



Conseguimos:

$$u = h\{t\}$$

Relacionar u e v



$x' = x - f$

No $\Delta OQ'Q''$:

$x = a \cdot \cos u$

$Y = a \cdot \operatorname{sen} u$

$y = Y \cdot C$

$y = (a \cdot \operatorname{sen} u)\, C$

$b = aC$

$y = b \cdot \operatorname{sen} u$

Do $\Delta OQ'Q''$:

$x = a \cdot \cos u$

$y = b \cdot \operatorname{sen} u$

No $\Delta FQQ''$:

$x' = r \cdot \cos v$

$y = r \cdot \operatorname{sen} v$

Raio vetor r em função da anomalia excêntrica u

Do ΔOQ'Q'':
$x = a \,.\, \cos u$
$y = b \,.\, \operatorname{sen} u$

Do ΔFQQ'':
$x' = r \,.\, \cos v$
$y = r \,.\, \operatorname{sen} v$

$r \,.\, \operatorname{sen} v = b \,.\, \operatorname{sen} u$

$\operatorname{sen} v = b \,.\, \operatorname{sen} u / r$

$b = aC$

$\operatorname{sen} v = aC \,.\, \operatorname{sen} u / r$

$C \equiv \sqrt{1 - e^2}$

$\operatorname{sen} v = a \sqrt{1 - e^2} \,.\, \operatorname{sen} u / r$

$x' = x - f \longleftarrow f \equiv ae$

$r \,.\, \cos v = a \,.\, \cos u - ae$

$\cos v = a(\cos u - e) / r$

$\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v = 1$

$a^2 (1 - e^2) \,.\, \operatorname{sen}^2 u / r^2 + a^2 (\cos u - e)^2 / r^2 = 1$

$a^2[\operatorname{sen}^2 u - e^2 . \operatorname{sen}^2 u + (\cos^2 u - 2 e \cos u + e^2)] = r^2$

$a^2[\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u + e^2 - e^2 . \operatorname{sen}^2 u - 2 e \cos u] = r^2$

$a^2[1 + e^2 (1 - \operatorname{sen}^2 u) - 2 e \cos u] = r^2$

$a^2[1 + e^2 \cos^2 u - 2 e \cos u] = r^2$

$a^2[1 - e \cos u]^2 = r^2$

$r = a(1 - e \cos u)$

Relacionar u e v

$sen\, \mathbf{v} = aC \,.\, sen\, \mathbf{u} / \mathbf{r}$

$cos\, \mathbf{v} = \mathbf{a}\,(cos\, \mathbf{u} - e) / r$

$r = a\,(1 - e\, cos\, \mathbf{u})$

$sen\, \mathbf{v} = aC \,.\, sen\, \mathbf{u} / [a\,(1 - e\, cos\, \mathbf{u})]$

$C \equiv \sqrt{\{1 - e^2\}}$

$sen\, \mathbf{v} = \sqrt{\{1 - e^2\}} \,.\, sen\, \mathbf{u} / [1 - e\, cos\, \mathbf{u}]$

$cos\, \mathbf{v} = \mathbf{a}\,(cos\, \mathbf{u} - e) / [a\,(1 - e\, cos\, \mathbf{u})]$

$cos\, \mathbf{v} = (cos\, \mathbf{u} - e) / [1 - e\, cos\, \mathbf{u}]$

$0 \leq \underline{\mathbf{v}} \leq 180^0$

Se $sen\, \mathbf{v} \geq 0$ então $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{v}}$

Se $sen\, \mathbf{v} < 0$ então $\mathbf{v} = 360^0 - \underline{\mathbf{v}}$

Outro jeito de relacionar u e v

Fórmula da tangente do arco metade:

$$tan\ (v/2) = \sqrt{(1-cos\ v) / (1+cos\ v)}$$

Usando:

$$cos\ v = (cos\ u - e) / [1 - e\ cos\ u]$$

$$tan\ (v/2) = \sqrt{(1+e) / (1-e)}\ .\ tan\ (u/2)$$

$q \equiv tan\ (v/2)$

$\underline{v} = 2\ arctan\ (q)$

$-90^0 \leq \underline{v} \leq +90^0$

$$sen\ v = \sqrt{1-e^2}\ .\ sen\ u / [1 - e\ cos\ u]$$

Se $\underline{v} \geq 0$

Se $sen\ \underline{v} \geq 0 \Rightarrow v = \underline{v}$

Se $sen\ \underline{v} < 0 \Rightarrow v = \underline{v} + 180^0$

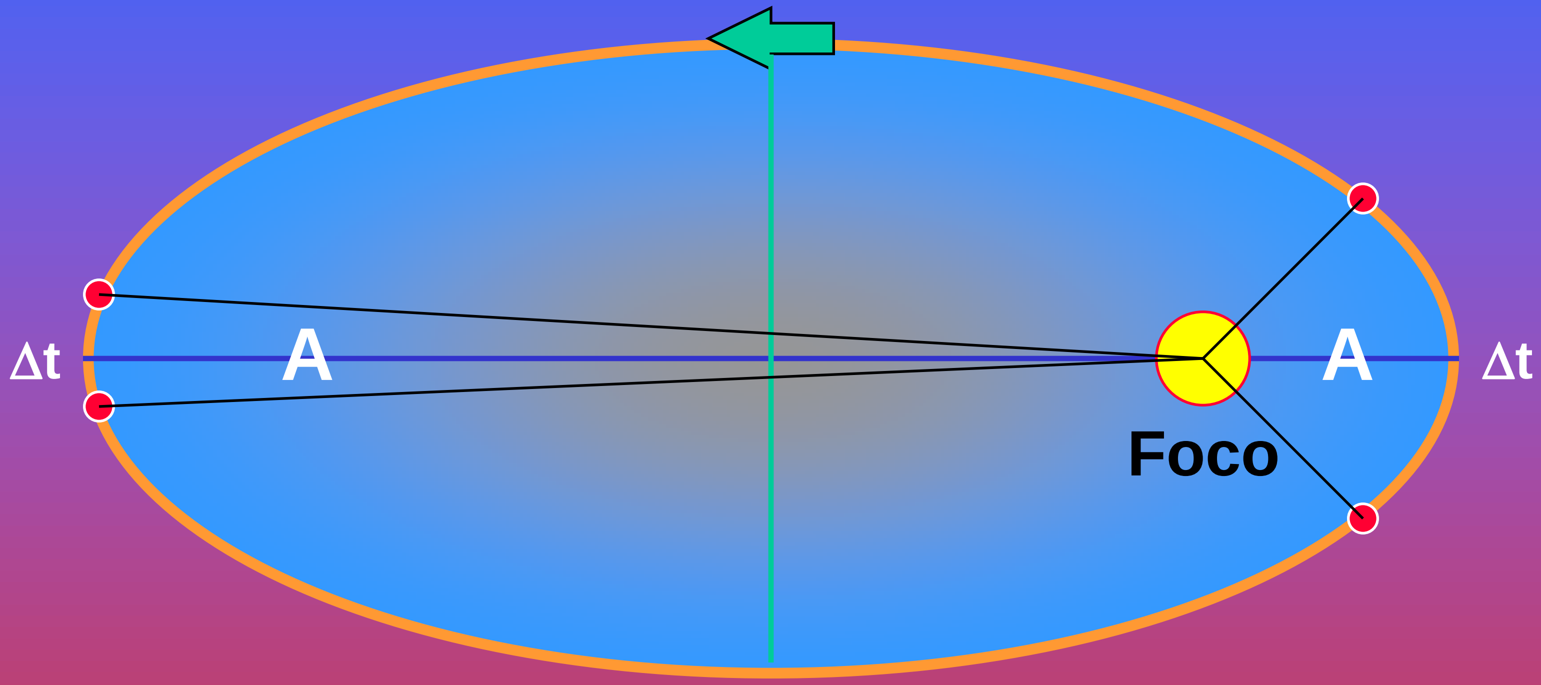
Se $\underline{v} < 0$

Se $sen\ \underline{v} \geq 0 \Rightarrow v = \underline{v} + 180^0$

Se $sen\ \underline{v} < 0 \Rightarrow v = \underline{v} + 360^0$

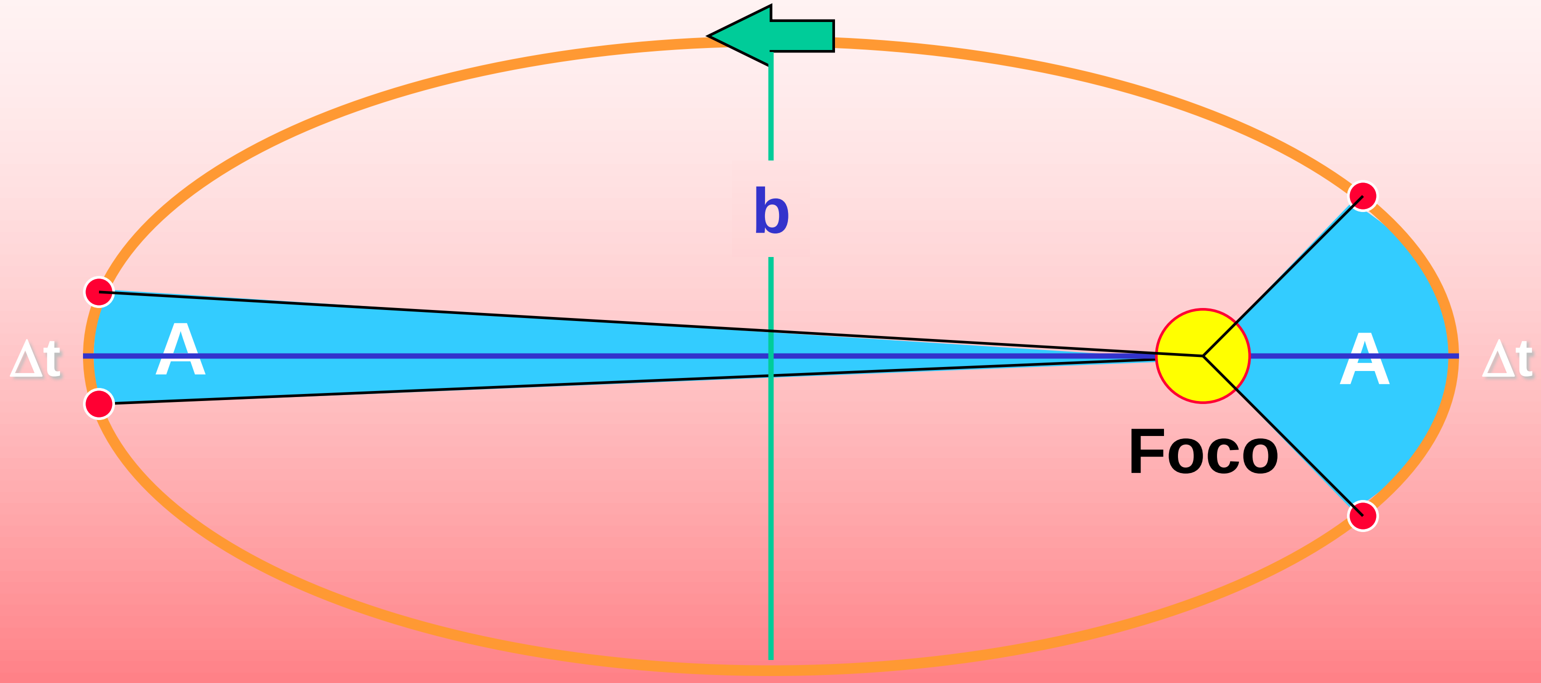
Segunda Lei de Kepler

(1571 - 1630)



Um corpo ligado a outro gravitacionalmente gira em torno dele, com seu raio vetor varrendo áreas iguais em tempos iguais.

Velocidade areolar (VA)



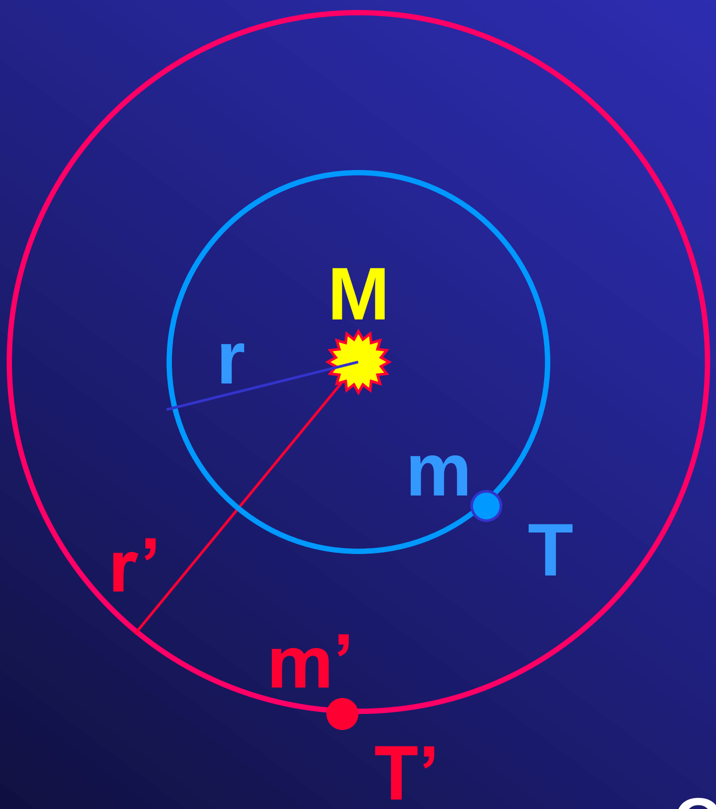
(VA) = ΔA / Δt

$A_{elipse} = \pi ab$

T = Período orbital

(VA) = πab / T

Terceira Lei de Kepler

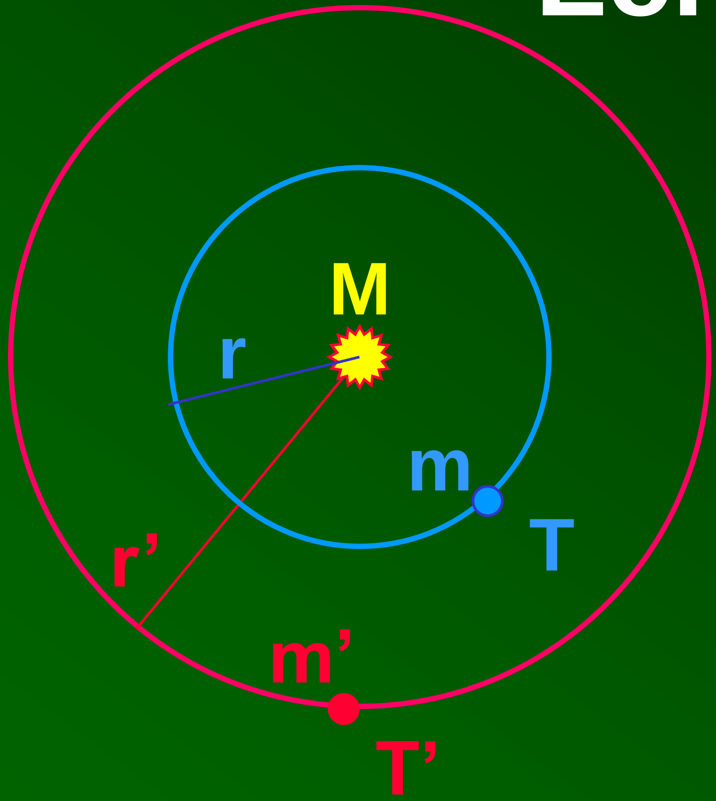


$$\left(r / r' \right)^3 = \left(T / T' \right)^2$$

$$r^3 = k T^2$$

O cubo do semi-eixo maior é proporcional ao quadrado do período orbital

Enunciado atual da Terceira Lei de Kepler



$$(r / r')^3 = (T / T')^2$$

$$r^3 = k T^2$$

Expressão correta:

$$r^3 = [G/(4\pi^2)] (M + m) T^2$$

$$(r / r')^3 = \{ (M + m) / (M + m') \} \times (T / T')^2$$

Relacionar u e t

Equação de Kepler

$(A_{PFQ})_{\text{Segunda lei de Kepler}} = (A_{PFQ})_{\text{Geometria}}$

Kepler:

$\pi ab \Rightarrow T$

$A_{PFQ} \Rightarrow (t-t_P)$

$A_{PFQ} = (\pi ab/T)\,(t-t_P)$

Geometria:

$A_{PFQ} = A_{POQ} - A_{FOQ}$

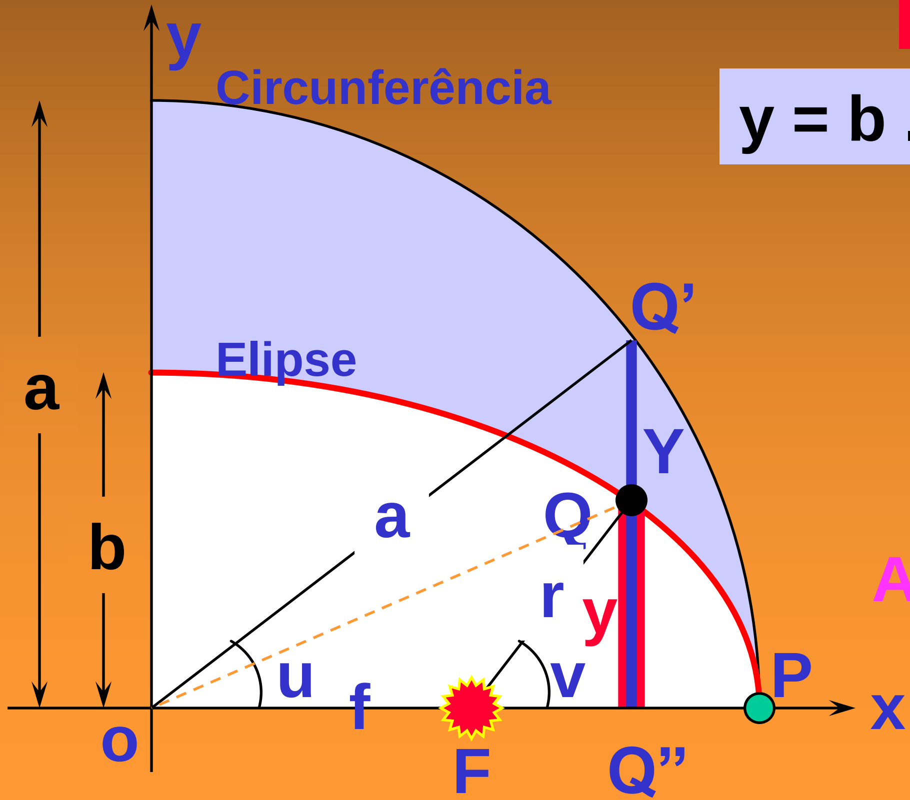
$f \equiv ae$

$y = b \, . \, sen \; u$

$A_{FOQ} = f.y/2$

$A_{FOQ} = (ae).(b \, . \, sen \; u)/2$

$A_{FOQ} = (a.b.e \; sen \; u) \, / \, 2$



$A_{POQ} = A_{POQ'} \, . \, C$

$A_{POQ} = [(u.a) \, . \, a/2] \, . \, C$

$A_{POQ} = [u.a. \, b/2]$

$A_{PFQ} = [u.a. \, b/2] - (a.b.e \; sen \; u) \, / \, 2$

$A_{PFQ} = (ab/2)[u - e \; sen \; u]$

Equação de Kepler

$$(A_{PFQ})_{\text{Segunda lei de Kepler}} = (A_{PFQ})_{\text{Geometria}}$$

$$A_{PFQ} = (\pi ab/T)\,(t-t_P)$$

$$A_{PFQ} = (ab/2)[u - e\,\mathit{sen}\,u]$$

$$(\pi ab/T)\,(t-t_P) = (ab/2)[u - e\,\mathit{sen}\,u]$$

$$(2\pi\,/\,T)\,(t-t_P) = [u - e\,\mathit{sen}\,u]$$

$$n \equiv 2\pi\,/\,T$$

$$(n)\,(t-t_P) = [u - e\,\mathit{sen}\,u]$$

$$M \equiv n\,(t - t_p)$$

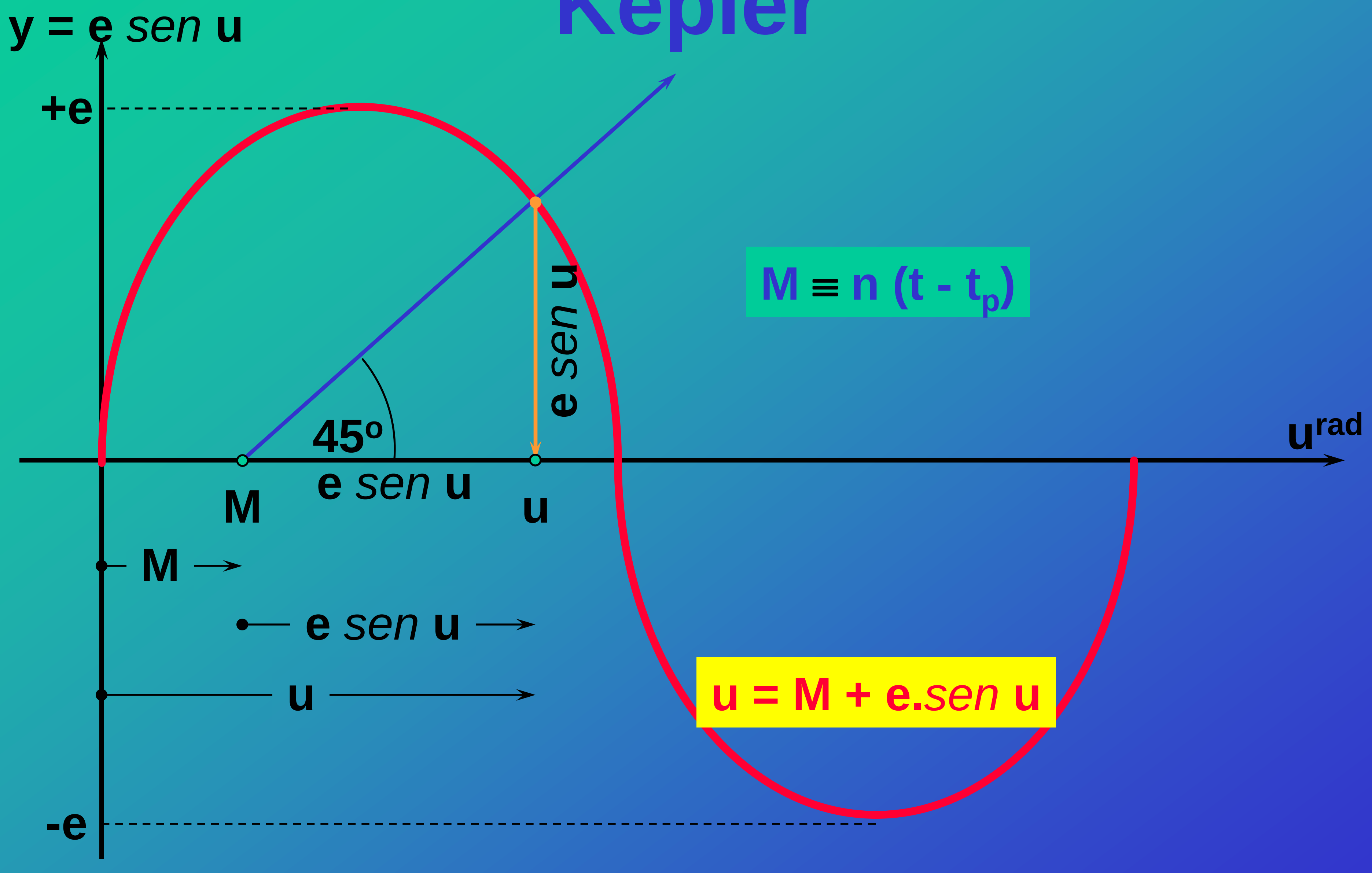
$$M = u - e\,\mathit{sen}\,u \qquad \text{(em radianos)}$$

$$M^0 = u^0 - (180^0\,/\,\pi\,)\,e\,.\,\mathit{sen}\,u \qquad \text{(em graus)}$$

$$u^0 = M^0 + (180^0\,/\,\pi\,)\,e\,.\,\mathit{sen}\,u \qquad \text{(em graus)}$$

Soluções aproximadas da Equação de Kepler

Solução gráfica da equação de Kepler



Solução algébrica aproximada da equação de Kepler

Desejo obter u com precisão ε (tolerância)

$u^0 = M^0 + (180^0 / \pi) \cdot e \cdot \mathit{sen}\, u$ **(em graus)**

Adotar: $u_0 = M$

$u_1 = M + (180^0 / \pi) \cdot e \cdot \mathit{sen}\, u_0$

$u_2 = M + (180^0 / \pi) \cdot e \cdot \mathit{sen}\, u_1$

$u_3 = M + (180^0 / \pi) \cdot e \cdot \mathit{sen}\, u_2$

.

.

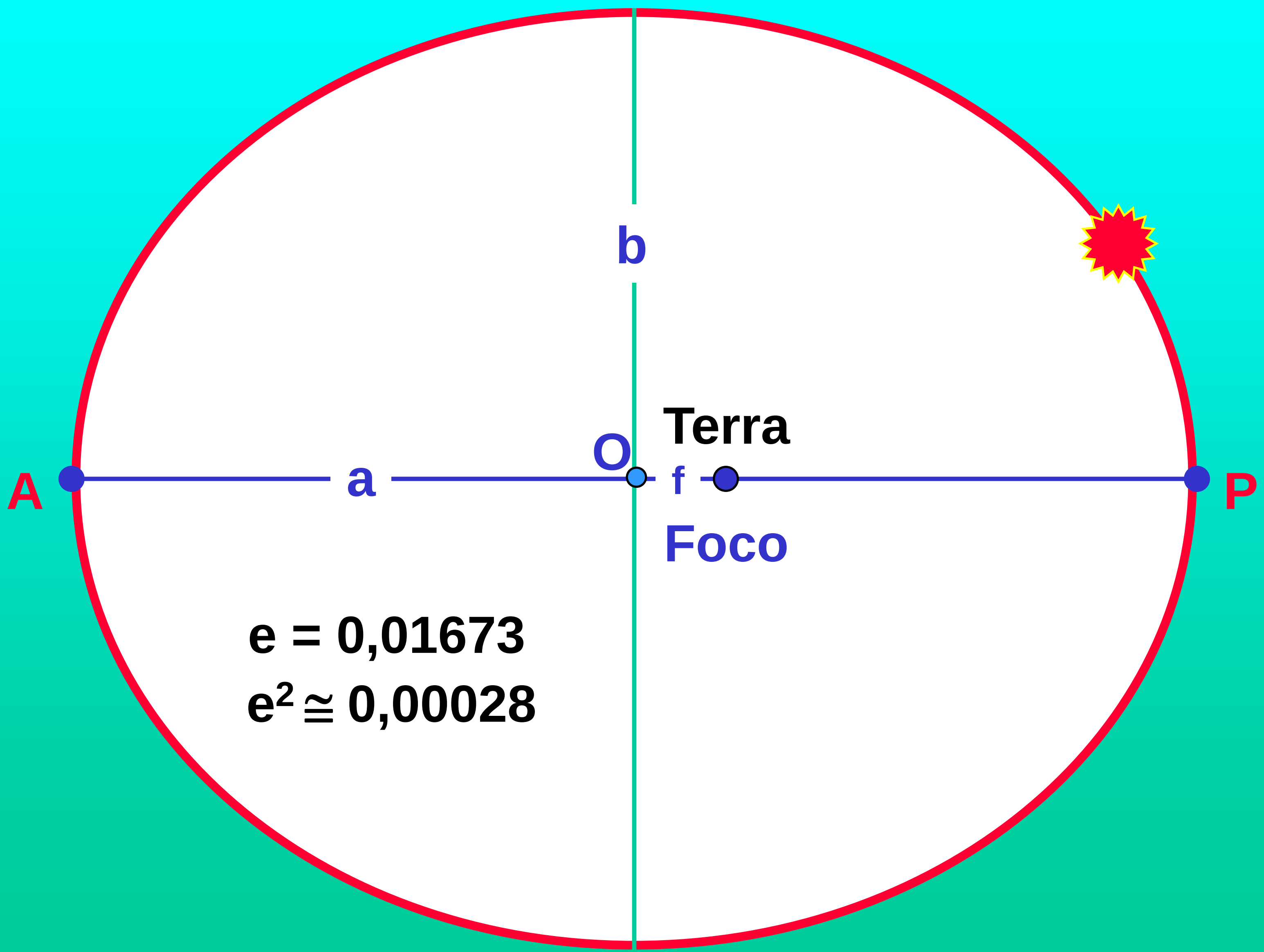
$u_n = M + (180^0 / \pi) \cdot e \cdot \mathit{sen}\, u_{n-1}$

Até que $| u_n - u_{n-1} | \leq \varepsilon$

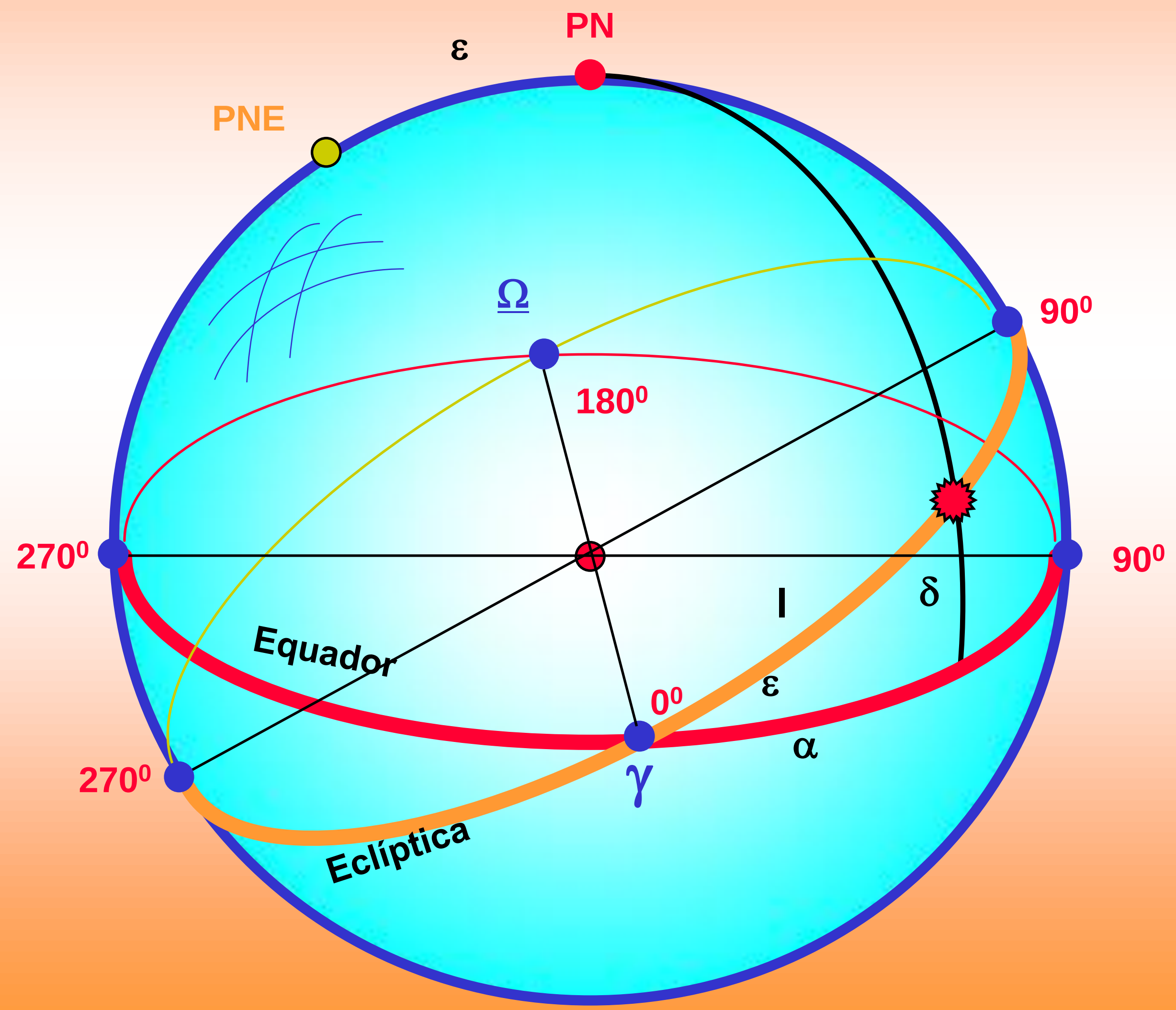
Solução aproximada: $u = u_n$

Coordenadas aproximadas do Sol em movimento elíptico

Movimento elíptico do Sol



Coordenadas equatoriais do Sol



Coordenadas aproximadas do Sol

(precisão de $0{,}01^0$ entre 1950 e 2050)

DJ2000 = 2 451 545,0

n = DJ - DJ2000 (Número de dias desde o meio-dia de 01/jan/2000)

$\varepsilon \cong 23{,}439^0 - 0{,}000\,000\,4\ n$ (Obliqüidade da eclíptica)

$L \cong 280{,}461^0 + 0{,}985\,6474\ n$ (Longitude média)

$0 \leq L < 360^0$ (Imposição)

$g \cong 357{,}528^0 + 0{,}985\,6003\ n$ (Anomalia média)

$0 \leq g < 360^0$ (Imposição)

$R \cong 1{,}000\,14^{UA} - 0{,}016\,71\ \cos g - 0{,}000\,14\ \cos 2g$ (Raio vetor do Sol)

$l_\bullet = L^0 + 1{,}915^0\ sen\ g + 0{,}020\ sen\ 2g$ (Longitude eclíptica do Sol)

$f = 180^0 / \pi$

$t = \tan^2 (\varepsilon / 2)$

$\alpha \cong l_\bullet{}^0 - f \,.\, t \,.\, sen\ 2l_\bullet + (f/2) \,.\, t^2 \,.\, sen\ 4l_\bullet$ (Ascensão reta do Sol)

$Eq.T^{minutos} \cong 4 \,.\, (L^0 - \alpha^0)$ (Equação do tempo: precisão de $0{,}1^{min}$)

$\delta \cong arcsen\ (sen\ \varepsilon \,.\, sen\ l_\bullet)$ (Declinação do Sol)

Fim